ORSAY
Série A
1641

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le No A.0.12.451

THESES

PRESENTEES

A L'UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Michael Robert HERMAN

≠

1ère thèse : SUR LA CONJUGAISON DIFFERENTIABLE DES DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS.

2ème thèse : PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE.

≠

Soutenues le 23 avril 1976 devant la Commission d'examen

MM.	J. CERF	Président
	P. DELIGNE	Examinateurs
	A. DOUADY	
	G. JOUBERT	
	H. ROSENBERG	
	D. SULLIVAN	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548118_0012

ORSAY

Série A

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le No A.O.12.451

THESES

PRESENTEES

A L'UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Michael Robert HERMAN

≠

1ère thèse : SUR LA CONJUGAISON DIFFERENTIABLE DES DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS.

2ème thèse : PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE.

≠

Soutenues le 1976 devant la Commission d'examen

MM.	J. CERF	Président
	P. DELIGNE	Examinateurs
	A. DOUADY	
	G. JOUBERT	
	H. ROSENBERG	
	D. SULLIVAN	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

T A B L E D E S M A T I E R E S

REMERCIEMENTS

INTRODUCTION

REFERENCES ET NOTATIONS

CHAPITRE I

Rappels et notations : groupes de difféomorphismes de T^n et topologie générale.

CHAPITRE II

Nombre de rotation des homéomorphismes du cercle.

CHAPITRE III

Etude des fermés de nombre de rotation constant.

CHAPITRE IV

Invariants de C^r-conjugaison à des rotations.

CHAPITRE V

Rappels d'arithmétique.

CHAPITRE VI

Remarques sur le théorème de Denjoy et sur les mesures σ-finies invariantes.

CHAPITRE VII

Un théorème local de conjugaison.

CHAPITRE VIII

Conséquences de l'inégalité de Denjoy : ergodicité par rapport à la mesure de Haar ; comment revenir par conjugaison à une rotation.

CHAPITRE IX

Dérivées secondes des itérés : du théorème de Denjoy à la conjecture d'Arnold.

CHAPITRE X

Invariant de conjugaison C^0 à des rotations.

CHAPITRE XI

Catégorie de Baire des orbites O_α^r dans les fermés F_α^r.

CHAPITRE XII

Centralisateurs.

CHAPITRE XIII

Quelques exemples sur T^n.

CHAPITRE XIV

Sur le groupe des difféomorphismes du tore ;
(Ann. Inst. Fourier XXIII, 2 (1973)).

CHAPITRE XV

Sur le groupe des difféomorphismes R-analytiques du tore ;
(Lect. Notes In Math. No 484 (1975)).

CHAPITRE XVI

Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs R-analytiques du tore ;
(Id.).

CHAPITRE XVII

Sur le groupe des difféomorphismes $\mathbb{R}$-analytiques de $\mathbb{R}$;
(Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam (1975)).

BIBLIOGRAPHIE

NOTES AJOUTEES EN COURS D'EPREUVE

Je remercie Jean Cerf d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

Sans l'aide de Harold Rosenberg, cette thèse n'aurait pas existé. Je lui exprime ma reconnaissance pour les problèmes qu'il m'a posés.

Ma gratitude va aussi à Adrien Douady pour m'avoir aidé dans la compréhension des difféomorphismes analytiques d'une variété analytique, et surtout pour avoir écouté la démonstration du théorème fondamental et m'avoir apporté de nombreuses remarques.

C'est un très grand honneur pour moi, que Pierre Deligne fasse partie du jury. Il a d'ailleurs simplifié et amélioré plusieurs points du théorème fondamental.

Gérard Joubert m'a permis d'éclaircir plusieurs points et je suis heureux qu'il ait accepté de participer au jury.

Je remercie Denis Sullivan d'avoir bien voulu se joindre au jury.

Alain Chenciner a suivi pas à pas depuis des années les étapes de ce mémoire. Son aide critique a été pour moi un encouragement. Sans Alain ce travail n'aurait pas eu lieu.

Je remercie J. P. Bourguignon, M. Chaperon, F. Laudenbach et B. Teissier de m'avoir aidé dans la rédaction, ainsi que J. M. Strelcyn de m'avoir prêté sa version du théorème fondamental.

L'aide de M. Reversat et J. M. Deshouillers m'a été particulièrement utile pour l'arithmétique.

Finalement ce mémoire est en grande partie consacré à la théorie ergodique, F. Ledrappier, J. M. Strelcyn, et J. P. Thouvenot m'ont posé les questions cruciales pour la démonstration du théorème fondamental, je leur en suis infiniment reconnaissant.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, tout particulièrement H. Levine et B. Maurey.

Enfin, je suis très reconnaissant aux membres du secrétariat du Centre de leur gentillesse et de leur efficacité. Michèle Lavallette et Marie-José Lécuyer ont tapé en un temps record un manuscrit difficile et touffu, je les remercie chaleureusement pour leur magnifique travail, ainsi que Dominique Concha pour avoir réalisé le tirage de ce mémoire.

*
* *

INTRODUCTION

Pour $0 \leq r \leq \omega$, on désigne par $\mathrm{Diff}^r_+(T^n)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^r de T^n qui sont C^r isotopes à l'identité (avec si $r = 0$, c'est le groupe des homéomorphismes, et C^ω = $\mathbb{R}$-analytique).

Le problème que nous proposons d'étudier est la C^r conjugaison c'est-à-dire la conjugaison dans $\mathrm{Diff}^r_+(T^1)$ à des rotations ou translations : $R_\alpha : x \to x + \alpha$ $(\alpha \in T^1)$.

Henri Poincaré a introduit en 1885 un invariant de conjugaison C^0, $\rho : \mathrm{Diff}^0_+(T^1) \to T^1$ appelé nombre de rotation et en 1932 Arnaud Denjoy a démontré (contrairement à ce que Poincaré supposait vraisemblable) que si f est un difféomorphisme de classe C^1 avec Df à variation bornée, et $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f est C^0 conjugué à R_α : $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec g un homéomorphisme du cercle.

Remarquons que si on impose $g(0) = 0$, g est alors unique, le problème étant alors: si f est de classe C^r, quelle est la classe de différentiabilité de g?

Vladimir I. Arnold en 1961 a montré que si f est un difféomorphisme C^ω "suffisamment" proche de R_α, avec α satisfaisant une condition diophantienne et si $\rho(f) = \alpha$, alors f est C^ω conjugué à R_α. Il a posé la

Conjecture d'Arnold : Il existe $A \subset T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de mesure de Haar 1, tel que si $f \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^1)$ et $\rho(f) = \alpha \in A$ alors f est C^ω conjugué à R_α.

De plus V. I. Arnold a donné un exemple de $f \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^1)$ $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mais f n'est pas absolument continuement conjugué à R_α.

Nous proposons dans ce mémoire de poursuivre cette étude. Déjà pour l'équation linéarisée en l'Id de la conjugaison C^∞ à R_α, $\varphi \in C^\infty(T^1) \to \varphi - \varphi \circ R_\alpha \in C^\infty(T^1)$, la réponse dépend de la nature arithmétique de α (i.e. les approximations de α par les rationnels) (noter que sur l'équation linéarisée le théorème de Denjoy semble faux!) le problème étant de passer des résultats sur l'équation linéarisée au problème de la conjugaison.

Le mémoire est composé de trois parties:
La première partie qui va du chapitre I au chapitre IX est consacrée (entre autre) à une réponse partielle à la conjecture d'Arnold.
Commençons par une définition.

Définition : Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et si $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$ est son développement en fraction continue, α est dit de densité bornée si

$$\sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}\right) < +\infty .$$

Remarque : Les nombres de densité bornée sont de mesure de Lebesgue nulle, mais de dimension d'Hausdorff 1 ; les nombres de type constant, et donc en particulier les nombres algébriques de degré 2, sont des nombres de densité bornée.

On a le théorème démontré au chapitre IX.6.1.

Théorème fondamental : Si $3 \leq r \leq \omega$, et si $f \in \mathrm{Diff}^r_+(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha$ de densité bornée, alors f est C^{r-2} conjugué à R_α, si f est C^∞ (resp. C^ω) f est C^∞ (resp. C^ω) conjugué à R_α.

Pour démontrer, on utilise essentiellement les neuf premiers chapitres.

Les chapitres I, II, III et V sont des rappels de résultats connus que nous exposons de façon systématique (surtout pour II et III).

Au chapitre IV, on introduit l'invariant H_r $(1 \leq r < +\infty)$ semi-continu inférieurement pour la C^r topologie, tel que si f vérifie $H_r(f) < +\infty$ alors f est C^r conjugué à une rotation.

Le chapitre VI est consacré au théorème de Denjoy (et les résultats sont de Denjoy).

Nous réexposons la démonstration fondamentale que Denjoy a donné en 1946 dans [3]. Nous remarquons que sa démonstration donne un théorème pour les homéomorphismes qu'on appelle de classe P (en fait si on lit bien Denjoy [3] on se rend compte que Denjoy le savait), ainsi le théorème de Denjoy reste valable pour les homéomorphismes PL de T^1. Nous appliquons cela pour construire un homéomorphisme PL de T^1 sans mesure σ finie invariante, absolument continue par apport à la mesure de Haar de T^1.

Mais le chapitre VI contient surtout l'inégalité de Denjoy Koksma et l'inégalité de Denjoy, inégalités essentielles pour la suite.

Le chapitre VII est indépendant de tous les chapitres. Dans ce chapitre, on reprend le théorème d'Arnold en suivant J. Moser et H. Rüssmann pour préciser les constantes et le voisinage. Ce chapitre est consacré aux "petits dénominateurs".

Dans la première partie du chapitre VIII on démontre le théorème suivant qui est une réponse partielle à un problème de Denjoy.

Théorème : Soit f un difféomorphisme de classe C^2 de T^1 de nombre de rotation irrationnel, alors f est ergodique par rapport à la mesure de Haar, m, de T^1, au sens suivant, A est un ensemble m-mesurable de T^1, et invariant par f, alors m(A) = 1 ou 0.

La fin du chapitre VIII et le chapitre IX sont consacrés à la démonstration du théorème fondamental.

La deuxième partie qui se compose du chapitre III et des chapitres X à XIII sont consacrés à montrer en un certain sens que le théorème de conjugaison locale VII.2 est le meilleur possible : il se produit bien une perte de dérivabilité comme on le supposait à partir de l'équation linéarisée.

Soit si $0 \leq r \leq \omega$, $F_\alpha^r = \{f \in \mathrm{Diff}_+^r(T^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$ = le fermé des difféomorphismes de classse C^r de nombre de rotation α ; et l'orbite de R_α, $O_\alpha^r = \{g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \mid g \in \mathrm{Diff}_+^r(T^1)\}$.

Au chapitre X, on montre que pour α irrationnel, O_α^o est résiduel dans F_α^o pour la C^o topologie.

Au chapitre XI, au contraire, pour tout $1 \leq r < +\infty$, O_α^r est maigre dans F_α^r pour la C^r topologie, et si α est un nombre de Liouville, O_α^∞ est maigre dans F_α^∞ pour la C^∞ topologie. Ces résultats et d'autres montrent bien que suivant la nature arithmétique du nombre de rotation, on a des réponses différentes.

Au chapitre XII, on reprend l'exemple d'Arnold et on montre qu'il existe dans la famille $f_{a,b}(x) = x + a \sin 2\pi x + b$, $|a| < \frac{1}{2\pi}$. On étudie aussi le problème des centralisateurs :
il existe $f \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec f non absolument continuement conjugué à R_α, mais le centralisateur C^∞ de f a la puissance du continu.

Finalement le chapitre XIII, on donne quelques exemples et généralisation à T^n.

La troisième partie est consacrée à l'étude de simplicité. On montre au chapitre XIV que $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(T^n)$ est un groupe simple, en XV, $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$ l'est aussi, et $X^{\omega}(T^n)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteur $\mathbb{R}$-analytique de T^n est une algèbre de Lie simple en XVI. Le dernier chapitre montre que le groupe des difféomorphismes croissant $\mathbb{R}$-analytique de $\mathbb{R}$ est un groupe simple.

Remarque importante : Il est bien plus commode pour des raisons d'écriture de travailler dans $D^r(T^1)$ le revêtement universel de $\mathrm{Diff}^{r}_{+}(T^1)$, puisque $D^r(T^1)$ s'identifie canoniquement au sous groupe des $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R})$ avec $f = \mathrm{Id} + \varphi$ et φ est une fonction $\mathbb{Z}$ périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (de classe C^r).

Evidemment notre problème se ramène à la conjugaison dans $D^r(T^1)$ aux translations $x \to R_\alpha(x) = x + \alpha$. En conséquence, nous énoncerons toutes les propositions dans $D^r(T^1)$ et le lecteur passera aisément au quotient : si $C = \{R_p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ = le centre de $D^r(T^1)$

$$\mathrm{Diff}^{r}_{+}(T^1) = D^r(T^1)/C = D^r(T^1)(\mathrm{mod}1)$$

Si $f \in D^r(T^1)$, $\bar{f}$ désigne le difféomorphisme de T^1 obtenu par passage au quotient.

REFERENCES ET NOTATIONS

Du chapitre I à XIII, les signes ■ indiquent la fin d'une démonstration.

On utilise les renvois suivants :
IX.6.1 indique le chapitre IX, 6 indique le paragraphe 6 du chapitre IX, et 6.1 indique le 1er sous paragraphe de 6.
Au cours d'un même chapitre, on n'indiquera pas le chapitre.

Pour les renvois bibliographiques : Arnold [1] veut dire se rapporter dans la bibliographie à Arnold puis l'article précédé de [1].

Les chapitres I à XIII ont chacun un plan et un commentaire où l'on indique rapidement quelques points de bibliographie ainsi que les points importants du chapitre qui suivra. Ils ne constituent pas des résumés.

Les chapitres XIV à XVII étant déjà des articles publiés la bibliographie leur est propre.

Comme références générales pour les fonctions absolument continues, le lecteur pourra se rapporter par exemple à Hewitt et Stromberg [1] .

Nous donnons maintenant quelques conventions et notations.

Conventions et notations

1) Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on convient $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ et p et q sont premiers entre eux.

2) Si f est une bijection d'un ensemble X, et si $n \in \mathbb{Z}$, f^n est l'itérée n^{eme} de f avec $f^o = Id_X$ (i.e. l'identité de X), f^{-1} est la bijection réciproque.

3) Si $\varphi_1 : X \to \mathbb{R}$, i = 1,2 sont deux fonctions ; on désigne le produit de φ_1 par φ_2 par $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ (point), et $\varphi_1 \cdot \varphi_1 = (\varphi_1)^2$, nous espérons que le lecteur ne sera pas induit en erreur avec les notations de 2).

4) Si $\varphi : X \to \mathbf{R}$, et a et b dans $\mathbf{R}$, $a \leq \varphi \leq b$ veut dire pour tout $x \in X$, $a \leq \varphi(x) \leq b$.

5) $dx = m$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ et aussi la mesure de Haar sur T^n. Si $\varphi : T^n \to \mathbf{R}^p$ est intégrable, on écrira indifféremment

$$m(\varphi) = \int_{T^n} \varphi \, d\, m = \int_{T^n} \varphi(x)\, dx$$

6) $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ = les réels positifs ou nuls.

7) s.e.d. est une abréviation pour "sauf pour ensemble de point au plus dénombrable". (l'ensemble pouvant être vide).

8) Si $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est bornée, on pose :

$$|\varphi|_o = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi(x)| \quad .$$

C H A P I T R E I

RAPPELS ET NOTATIONS : GROUPES DE DIFFEOMORPHISMES DE T^n ET TOPOLOGIE GENERALE

Plan :

1. Notations
   - 1.1 Le tore T^n
   - 1.2 Norme sur $\mathbb{R}^n$
   - 1.3 Métrique sur T^n
   - 1.4 De classe C^r
   - 1.5 Les groupes $Diff^r(T^n)$, $Diff^r_+(T^n)$ et $Diff^r_o(T^n)$
   - 1.6 Les espaces $C^r(T^n)$ et $C^r(T^n,\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{R}_+$ ou $r = +\infty$ ou ω
   - 1.7 Les groupes $D^r(T^n)$, $D^r_+(T^n)$ et $D^r(T^n,0)$

2. Topologie
   - 2.1 Topologie sur $C^r(T^n,\mathbb{R}^n)$
   - 2.2 Topologie sur $D^r(T^n)$, $0 \le r \le +\infty$ si $r \in \mathbb{R}_+$, $r \ge 1$
   - 2.3 Topologie sur $Diff^r_o(T^n)$, $0 \le r \le \omega$, r entier
   - 2.4 Proposition sur les espaces polonais
   - 2.5 Remarques
   - 2.6 Corollaire
   - 2.7 Densité

3. Rappels et définition sur les espaces de Baire

4. Semi-continuité

Commentaire :

Ce chapitre est un chapitre de notations et de rappels. Ainsi que le lecteur constatera, il est plus facile de travailler dans les groupes $D^r(T^n)$ revêtement $\mathbb{Z}^n$ cyclique de $Diff^r_o(T^n)$ (associé à l'injection scindée $0 \to \pi_1(T^n) \to \pi_1(Diff^r_o(T^n))$. En effet, il est alors commode et

facile d'écrire des difféomorphismes; par exemple si $|a| < \frac{1}{2\pi}$, $b \in \mathbb{R}$ $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b \in D^{\omega}(T^1)$.

La famille f_b dépendant de a et b apparaît très "naturellement" et l'étude de cette famille sera en partie l'objet du chapitre III et du chapitre XII (qui n'épuiseront pas l'étude de cette famille). Evidemment le problème qui nous occupe, la conjugaison dans $Diff_+^r(T^n)$, peut s'étudier dans $D^r(T^n)$ par revêtement et ensuite on passe au quotient par $\{1\} \to \mathbb{Z}^n \to D^r(T^n) \xrightarrow{\Pi} Diff_o^r(T^n) \to \{1\}$. On notera, si $f \in D^r(T^n)$, le difféomorphisme induit sur T^n par $\bar{f}$.

On introduit les groupes $D^r(T^n)$, $r \geq 1$, r non entier, comme les difféomorphismes de classe $C^{[r]}$ plus condition d'Hölder d'exposant $r - [r]$ sur la dérivée $[r]^{ième}$.

C'est un groupe pour $r \geq 1$, qui est un espace topologique avec topologie C^r, mais malheureusement ce n'est pas un groupe topologique (voir VII.1).

Dans ce mémoire, nous rappelerons chaque fois que r est non entier la définition.

Au chapitre VII, on supposera que, tout au long, r est non nécessairement entier.

Au chapitre IV, nous introduisons les homéomorphismes de classe C^w, w étant un module de continuité et aussi plus simplement C^β, $0 < \beta < 1$; f en est un de classe C^β, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$ si $f - Id$ et $f^{-1} - Id$ sont hölderiennes d'exposant β. Ce n'est pas un groupe. On convient que f est homéomorphisme lipschitzien si f et f^{-1} sont lipschitziens.

Tout ceci n'est pas un amusement : en effet, on utilisera au chapitre IX dans la démonstration du théorème fondamental de la conjugaison différentiable à des rotations, IX.6.1, le cas r non entier. Ce cas apparaît comme un outil fondamental pour l'étude de la conjugaison différentiable, il reste que nous n'avons pas poursuivi une étude systématique du cas r non entier (qui reste pour nous à l'état d'outil).

Au chapitre X, XI, XII, nous utiliserons constamment 2.4 à 2.7 et 3) et 4)

1. NOTATIONS

1.1 Le tore T^n

Soit n un entier $n \geq 1$ et $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n, $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ la projection canonique.

1.2 Norme sur $\mathbb{R}^n$

On note $|\ |$ la norme suivante sur $\mathbb{R}^n$, si $x = (x,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sup_i |x_i| \qquad \text{(i.e. la norme } \ell^\infty\text{)}.$$

Cette norme sur $\mathbb{R}^n$ induit une norme sur $\mathcal{L}_s((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R}^n)$ (p entier) espace des formes multilinéaires symétriques vectorielles, norme que l'on note encore $|\ |$.

1.3 Métrique sur T^n

On choisit sur T^n la métrique quotient : si x et $y \in T^n$ et si $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont des relèvements à $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|x - y\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}^n} |\tilde{x} - \tilde{y} + p|$$

1.4 De classe C^r

Dans la suite r désignera la classe de différentiabilité d'application, r sera un entier non négatif soit égal à $+\infty$ ou ω (C^ω pour $\mathbb{R}$-analytique). On convient r est entier, $0 \leq r \leq \omega$ veut dire soit r est entier soit $r = +\infty$ ou $r = \omega$ (on convient si $r \in \mathbb{R}$, $r < +\infty < \omega$). Dans la suite $0 \leq r \leq \omega$ voudra dire soit r est entier positif, soit $r = +\infty$ ou ω.

Nous introduisons aussi $r \in \mathbb{R}_1$, pour de classe $C^{[r]}$ plus condition d'Hölder d'exposant $r - [r]$ ou $\mathrm{Lip}_{r-[r]}$ ($\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfait une condition d'Hölder d'exposant β, $0 < \beta < 1$, s'il existe $k \geq 0$, tel que tout x et y dans $\mathbb{R}^n$ on a

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|^\beta$$

Si $\beta = 1$, φ est dite lipschitzienne).

Si $0 \leq r \leq \infty$, r non entier, nous le préciserons toujours (sauf au chapitre VII ou l'on supposera que $r \in \mathbb{R}_+$ ou $r = +\infty$ ou ω).

1.5 Les groupes $\mathrm{Diff}^r(T^n)$, $\mathrm{Diff}^r_+(T^n)$ et $\mathrm{Diff}^r_o(T^n)$

Pour r entier $0 \leq r \leq \omega$, soit $\mathrm{Diff}^r(T^n)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^r de T^n, avec la convention que $\mathrm{Diff}^0(T^n)$ est le groupe des homéomorphismes de T^n.

Soit $\mathrm{Diff}^r_+(T^n)$ le sous-groupe (distingué) de $\mathrm{Diff}^r(T^n)$ des difféomorphismes qui sont C^r isotopes à l'identité. Si $r \geq 1$, alors $\mathrm{Diff}^r_+(T^n) = \mathrm{Diff}^1_+(T^n) \cap \mathrm{Diff}^r(T^n)$. Soit $\mathrm{Diff}^r_o(T^n)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r(T^n)$ des difféomorphismes de T^n qui sont homotopes à l'identité. Pour $n \leq 3$, on a $\mathrm{Diff}^r_o(T^n) = \mathrm{Diff}^r_+(T^n)$ voir Cerf [1] et [2].

1.6 Les espaces $C^r(T^n)$ et $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $r = +\infty$ ou ω

On désigne par $C^r(T^n)$ les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^r et $\mathbb{Z}^n$ périodiques ($0 \leq r \leq \omega$) $C^r(T^n)$ s'identifie canoniquement avec les fonctions de T^n dans $\mathbb{R}$ de classe C^r.

Nota : Nous ferons constamment cette identification.

On pose :
$C^r(T^n, \mathbb{R}^n) \cong (C^r(T^n))^n$ qui s'identifie aux champs de vecteurs de classe C^r sur T^n. Si $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, si r est entier $0 \leq r < +\infty$, $D^r\varphi$ est la dérivée d'ordre r de φ avec la convention $D^0\varphi = \varphi$, $D^1\varphi = D\varphi$.

1.7 Les groupes $D^r(T^n)$, $D^r_+(T^n)$ et $D^r(T^n, 0)$

a) r entier $0 \leq r \leq \omega$

Si f est un C^r-difféomorphisme de T^n homotope à l'Id, par la théorie du revêtement universel, il existe un relèvement $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec $\tilde{f}$ un C^r-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et $\tilde{f} - \mathrm{Id} = \varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$.

Considérons $D^r(T^n)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrivent $f = \mathrm{Id} + \varphi$ avec $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$.

On a l'inclusion de $\mathbb{R}^n$ dans $D^\omega(T^n)$ comme sous-groupe de translations ou de rotations :

$$\alpha \in \mathbb{R}^n \to R_\alpha \in D^\omega(T^n) \quad \text{avec } R_\alpha(x) = x + \alpha$$

et on a $\alpha \in T^n \to R_\alpha \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ avec $R_\alpha : x \to x + \alpha$.

Soit $C = \{R_p \mid p \in \mathbb{Z}^n\} \cong \mathbb{Z}^n$, C est le centre de $D^r(T^n)$, $0 \leq r \leq \omega$. On a

$$\mathrm{Diff}_o^r(T^n) \cong D^r(T^n)/C \ .$$

On la suite exacte de groupes

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \to & \mathbb{Z}^n & \to & D^r(T^n) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Diff}_o^r(T^n) & \to & \{1\} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \{1\} & \to & \mathbb{Z}^n & \to & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi} & T^n & \to & \{1\} \end{array}$$

Si $f \in D^r(T^n)$, $\pi(f) \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n)$, on écrira aussi $f \pmod{\mathbb{Z}^n}$ à la place de $\pi(f)$ ou encore $f \pmod{1}$ si $n = 1$; on notera souvent $\pi(f) = \bar{f}$.

Notation : Si $\alpha \in R^n$, on écrira encore R_α la translation $R_{\pi(\alpha)}$ sur T^n. Rappelons que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ alors dire que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si "R_α sur T^n est une translation ergodique."

b) r non entier

Si $r \geq 1$, r non entier, on définit de façon analogue $D^r(T^n)$ qui est alors un groupe .

Si $0 < r < 1$, $f \in D^0(T^n)$ est un homéomorphisme de classe C^r si $f - \mathrm{Id} \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ et si $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ (remarquons que $f - \mathrm{Id} \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ n'implique pas que $f^{-1} - \mathrm{Id} \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$) . Il est à remarquer que les homéomorphismes de classe C^r, $0 < r < 1$, ne forment pas un groupe pour r fixé.

$f \in D^0(T^n)$ est homéomorphisme lipschitzien si f et f^{-1} sont des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ lipschitzienne pour la métrique de $\mathbb{R}^n$ standard ; soit il existe $k \geq 1$ tel que pour tout x et y, on ait $\frac{1}{k}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

c) $D_+^r(T^n)$ $0 \leq r \leq +\infty$ et $D^r(T^n, 0)$, si $r \geq 1$.

Si $0 \leq r \leq \omega$, $D_+^r(T^n)$ est le sous-groupe des difféomorphismes de classe $C^{[r]}$, $C^{[r]}$-isotopes à l'identité. On pose $D^r(T^n, 0) = \{g \in D^r(T^n) \mid g(0) = 0\}$ et aussi $\mathrm{Diff}_o^r(T^n, 0) = \{g \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n) \mid g(0) = 0\}$.

2. TOPOLOGIE

2.1 Topologie sur $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$

On pose, si $\varphi \in C^o(T^n, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi|_{C^o} = |\varphi|_o = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Max}} |\varphi(x)|$.

Si r est entier, $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi|_{C^r} = |\varphi|_o + \ldots + |D^r\varphi|_o$;

Si $0 \leq r < +1$, $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, on a la semi-norme $|\varphi|_r = \underset{x \neq y}{\text{Max}} \dfrac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^r}$

et $|\varphi|_{C^r} = |\varphi|_o + |\varphi|_r$.

Si $0 \leq r < +\infty$, $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ est espace de Banach.

Si $r = +\infty$, $C^\infty(T^n, \mathbb{R}^n)$ est espace Fréchet, la topologie étant la topologie limite projective des topologies C^r.

Si $r = \omega$, on met la C^∞- topologie sur $C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n)$[♦] . On désigne par δ_∞ une métrique sur $C^\infty(T^n, \mathbb{R}^n)$ invariante par translation et complète, définissant la topologie de Fréchet sur cet espace.

2.2 Topologie sur $D^r(T^n)$, $0 \leq r \leq +\infty$.

2.2.1 Si $0 \leq r < +\infty$, on a la métrique $\delta_r(f,g) = |f-g|_{C^r}$ si r est entier et si $r \geq 1$ est non entier

$$\delta_r(f,g) = |f-g|_{C^{[r]}} + |D^{[r]}(f-g)|_{C^{r-[r]}}$$

si $r = +\infty$, on a la métrique

$$\delta_\infty(\delta,g) = \delta_\infty(f-g,0)$$

Ces métriques définissent la C^r- topologie sur $D^r(T^n)$.

♦ Il existe une topologie d'e.v.t.l.c. et complet sur $C^\omega(T^n)$ appelé C^ω topologie : la topologie limite inductive localement convexe des espaces de fonctions holomorphes définies sur un système fondamental ad hoc de voisinages de Stein de $\mathbb{R}^n$ dans C^n (par exemple $|\text{Im } z| < h$, $h \to 0$). Pour cette topologie $C^\omega(T^n)$ n'est ni métrisable ni de Baire, comme cette topologie ne nous sera d'aucune utilité, nous supposerons que sur les fonctions C^ω, on met la C^∞- topologie qui est moins fine que la C^ω- topologie, bien que la plupart des propositions sont vraies avec la C^ω- topologie.

Sur $D^{\omega}(T^n)$, on met la C^{∞}-topologie.

2.2.2 Pour $0 \leq r \leq +\infty$, r entier, $D^r(T^n)$ est un groupe tologique pour la C^r-topologie (voir Cerf [1]).

2.2.3 Remarque : Si $r \geq 1$ non entier, $D^r(T^n)$ n'est pas un groupe topologique pour la C^r-topologie (voir VII.1).

2.2.4 Si $0 \leq r \leq \omega$, r entier, $D^r(T^n)$ est localement contractile(pour la C^r-topologie).

Pour r = 0, c'est un théorème dû à Edwards-Kirby. Si $r \geq 1$ et $f = Id + \varphi$, si φ est suffisamment voisin de 0 dans la C^1-topologie

$$t \in [0,1] \to Id + t\varphi$$

est une contraction sur l'identité. Comme $D^r(T^n)$ est groupe topologique, il est localement contractile en un point puisqu'il l'est au voisinage de l'identité .

2.2.5 Si $1 \leq r \leq \omega$.
$D^r(T^n)$ est canoniquement homéomorphe à un ouvert de $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ (ouvert induit par la C^1-topologie) donc si $1 \leq r < +\infty$, $D^r(T^n)$ est canoniquement une variété banachique et si $r = +\infty$ une variété fréchétique (il est donc localement contractile si $r \geq 1$, r non entier).
$D^r_+(T^n)$ est la composante connexe de l'identité. $D^r_+(T^n)$ est un sous-groupe ouvert (dans la C^r topologie) de $D^r(T^n)$ et aussi un sous groupe fermé.
Si $r \geq 1$, r entier $< +\infty$, bien que $D^r(T^n)$ soit un groupe topologique pour la C^r topologie et une variété banachique, $D^r(T^n)$ n'est pas un groupe de Lie banachique de classe C^1. Les applications $g \to f \circ g$ et $f \to f^{-1}$ ne sont pas de classe C^1 pour la C^r-topologie.

On montre (voir Dieudonné [1 , VIII.1.2 exercice 8) et X.2. exercice 4)]) que si $k \geq 0$, k entier

$$(f,g) \in D^r(T^n) \to f \circ g \in D^{r-k}(T^n)$$

$$f \in D^r(T^n) \to f^{-1} \in D^{r-k}(T^n)$$

sont de classe C^k. C'est que l'on appelle la perte de différentiabilité.
Pour $r = +\infty$, en un sens à préciser, $D^{\infty}(T^n)$ est groupe de Lie fréchétique.
Le théorème des fonctions implicites étant en général faux pour les espaces de Fréchet,

il faut des hypothèses beaucoup plus draconniennes pour avoir un théorème. Nous renvoyons le lecteur à F. Sergeraert [1] pour un théorème des fonctions implicites adapté à notre étude. L'objet de ce travail est l'étude de cette difficulté sur un cas particulier , la conjugaison dans $D^r(T^n)$ à des translations , et de montrer que pour r fini il se produit ce qu'on appelle une perte de différentiabilité.

2.3 Topologie sur $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$, $0 \le r \le \omega$, r entier

Sur $\mathrm{Diff}_o^o(T^n)$, on a la métrique qui définie la C^o-topologie

$$d_o(f,g) = \sup_{x \in T^1} \|f(x) - g(x)\| \quad .$$

sur $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$, $1 \le r \le +\infty$, r entier, on a la métrique qui définit la C^r-topologie : si f et $g \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ et si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des relèvements à $D^r(T^n)$,

$$d_r(f,g) = d_o(f,g) + |D^1(\tilde{f} - \tilde{g})|_{C^{r-1}} \qquad \text{si } 1 \le r < +\infty$$

$$d_\infty(f,g) = d_o(f,g) + \delta_\infty(D^1(\tilde{f} - \tilde{g}),0) \quad \text{si } r = +\infty \ .$$

Sur $\mathrm{Diff}_o^\omega(T^n)$ on met la C^∞- topologie.

Pour la C^r-topologie, $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ est un groupe topologique localement contractile et la suite exacte de groupes

$$\{1\} \to C \cong \mathbb{Z}^n \to D^r(T^n) \to \mathrm{Diff}_o^r(T^n) \to 0$$

est une suite exacte de groupe topologique. $D^r(T^n)$ est le revêtement $\mathbb{Z}^n$ cyclique associé à l'injection (scindée)

$$0 \to \pi_1(T^n) \to \pi_1(\mathrm{Diff}_o^r(T^n))$$

Si n = 1,2, $D^r(T^n)$ pour $0 \le r \le +\infty$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ avec la C^r-topologie de plus on a : si n= 1,2, $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ est la composante connexe de l'identité pour la C^r-topologie (i.e. $\mathrm{Diff}_o^r(T^n) = \mathrm{Diff}_+^r(T^n)$).

2.4 Proposition : $0 \leq r \leq +\infty$ (r entier), $D^r(T^n)$ (resp $\mathrm{Diff}^r_o(T^n)$) pour la C^r-topologie est un espace topologique polonais (i.e. homéomorphe à un espace métrique complet séparable).

Démonstration : Si on prend comme nouvelle métrique sur $D^r(T^n)$
$\rho_r(f,g) = |f - g|_{C^r} + |f^{-1} - g^{-1}|_{C^r}$ si $0 \leq r < +\infty$ et
$\rho_\infty(f,g) = \delta_\infty(f,g) + \delta_\infty(f^{-1},g^{-1})$ si $r = +\infty$, ρ_r définit sur $D^r(T^n)$ une topologie équivalente à la C^r-topologie puisque $D^r(T^n)$ est un groupe topologique, et pour cette métrique ρ_r, $D^r(T^n)$ est complet. $D^r(T^n)$ est séparable, car homéomorphe à un sous-espace de $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ qui est donc séparable.

On montre de même que $\mathrm{Diff}^r_o(T^n)$ est homéomorphe à un métrique complet, et il est séparable puisque

$$\pi : D^r(T^n) \to \mathrm{Diff}^r_o(T^n) \to \{1\}$$

est continue. ∎

2.5 Remarques : 1) Si $k < r$, $D^r(T^n)$ avec la C^k topologie n'est pas de Baire ;

2) On supposera qu'un sous-espace de $D^r(T^n)$ a la topologie induite par la C^r topologie sauf mention du contraire.

2.6 Corollaire : Pour $0 \leq r \leq +\infty$, r entier tout fermé de $D^r(T^n)$ (resp $\mathrm{Diff}^r_o(T^n)$) et même tout G_δ (i.e. une intersection dénombrable d'ouverts) est un espace topologique polonais et donc a la propriété de Baire.

Démonstration : (voir Bourbaki [2]).

2.7 Densité
Soit $P_{\mathbb{Q}}(T^n)$ l'ensemble de $f \in D^\omega(T^n)$ avec $f = Id + \varphi$, où φ est une application polynôme trigonométrique (i.e. chaque composante de φ est un polynôme trigonométrique à coefficients rationnels). $P_{\mathbb{Q}}(T^n)$ est dénombrable. $P_{\mathbb{Q}}(T^n)$ n'est pas un groupe.

Proposition : Si $r \geq 1$, r entier, $P_{\mathbb{Q}}(T^n)$ est dense dans $D^r(T^n)$ pour la C^r topologie.

Si $n = 1$, $P_{\mathbb{Q}}(T^1)$ est dense dans $D^o(T^1)$ pour la C^o topologie.

Démonstration : Si $r \geq 1$, $D^r(T^n)$ est homéomorphe à un ouvert (ouvert dans la C^1 topologie de $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ et la proposition est alors classique. Si $n = 1$, et $r = 0$, voir chap.XVII (c'est aussi classique par la continuité uniforme des $f \in D^o(T^1)$ et le fait que f est croissante).

3. RAPPELS DE DEFINITION SUR LES ESPACES DE BAIRE (voir Bourbaki [2])

Soit X un espace topologique de Baire (par exemple un espace topologique polonais) on a les

3.1 Définitions : 1) Un ensemble de X est maigre s'il est contenu dans une réunion dénombrables de fermés (i.e. un F_σ) sans point intérieur. Comme X est de Baire, la réunion est sans point intérieur.

2) Un ensemble est résiduel s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts (i.e. un G_δ) denses, ce qui est équivalent à ce que son complémentaire est maigre.

3) Une propriété d'éléments de X est générique si elle est vraie sur un ensemble résiduel.

3.2 Un espace topologique est parfait s'il est sans point isolé et non vide.

3.3 Un cantor dans $[0 1]$ est fermé parfait sans point intérieur

3.4 On a la

Proposition : Soit X un espace topologique polonais et F un G_δ sans point isolé, alors F a la puissance du continu.

Démonstration : Comme F est un espace topologique polonais, on peut supposer X = F et X est sans point isolé. X se plonge dans $[0 1]^{\mathbb{N}}$ (voir Bourbaki [2]) donc Card (X) $\leq$ Card ($\mathbb{R}$) . On montre (Hewitt et Stromberg [1 , chap. II 6.65]), que Card(X) $\geq$ Card($\mathbb{R}$) car X étant un espace métrique complet sans point isolé, il existe une injection continue d'un cantor triadique dans X.

Remarque : Puisque X est de Baire et séparé, s'il est sans point isolé, on voit facilement que son cardinal est strictement supérieur au dénombrable.

4. SEMI-CONTINUITE (voir Dieudonné [2])

Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, et X un espace topologique $f:X \to \bar{\mathbb{R}}$ est semi-continue supérieurement si pour tout $a \in \bar{\mathbb{R}}$, $f^{-1}[-\infty, a[$ est ouvert. $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est semie continue inférieurement si $-f$ est semi-continue inférieurement. On a les propositions que nous utiliserons, soient

Proposition : Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement. Alors $\{x | f(x) < +\infty\}$ est un F_σ (réunion dénombrable de fermés) et donc $f^{-1}(+\infty)$ est un G_δ (une intersection dénombrable d'ouverts).

Démonstration : $\{x \in X | f(x) < +\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ avec $F_n = \{x \in X | f(x) \leq n\}$ qui est fermé par la semi-continuité inférieure de f. ∎

Proposition : Soit $f : X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ semi-continue supérieurement alors $f^{-1}(0)$ est un G_δ.

Démonstration : $f^{-1}(0) = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1}} U_n$ avec $U_n = \{x \in X | f(x) < \frac{1}{n}\}$; U_n est ouvert puisque $f \geq 0$. On a bien que $f^{-1}(0) = \bigcap_n U_n$ qui est donc un G_δ. ∎

Rappelons que le sup d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continu inférieurement, qu'une fonction semi-continue inférieurement sur un espace topologique polonais est de première classe de Baire (i.e. limite simple d'une suite de fonctions continues) elle est alors continue en chaque point d'un ensemble résiduel.

C H A P I T R E I I

NOMBRE DE ROTATION DES HOMEOMORPHISMES DU CERCLE

Plan :

1. Mesures de probabilités
2. Nombre de rotation
3. Généralités sur la conjugaison
   - 3.1 Définition de la C^k conjugaison
   - 3.2 Minimalité
   - 3.3 Classe de différentiabilité de l'homéomorphisme qui conjugue à une translation ergodique.
4. Définitions de F_α^r, O_α^r et de $O_\alpha^{r,k}$, $0 \leq k \leq r$
5. Points périodiques et nombre de rotation
6. Caractérisation de $O_{p/q}^r$, $p/q \in \mathbb{Q}$
7. Introduction à l'étude de F_α^o si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$
   - 7.1 Semi-conjugaison
   - 7.2 Sur le cantor invariant
8. Unique ergodicité des homéomorphismes de T^1 sans point périodique.
9. Critère de C^o conjugaison à une rotation

Commentaire :

Ce chapitre est dû essentiellement à H. Poincaré, reprit par A. Denjoy [2]. La proposition 2.7 est de V.I. Arnold [1] et 8 est de Carlemann [1] , reprit par Denjoy [1] et aussi retrouvé par H. Furstenberg [1]. Finalement nous suivons Furstenberg [1] dans 8 . Pour une autre démonstration (voir VI.3).

L'introduction en 1 des mesures de probabilités, il nous semble, simplifie l'exposition des résultats classiques sur la fonction ρ, nombre de rotation en 2 . Noter l'invariance de ρ en 2.10 qui est plus générale que celle par conjugaison. Il en est de même en 7 pour la semi-conjugaison et le cantor invariant.

Le problème de conjuguer f, avec $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ à $R_{p/q}$ est élémentaire, et sera résolu en 6 .

Toutes nos conjugaisons $C^k, 0 \leq k \leq \omega$, à des translations sont dans les groupes $D^k(T^n)$ (ou $\mathrm{Diff}_o^k(T^n)$), dans tous les chapitres sauf XVII.

Nous signalons que si $f \in D^r(T^1)$ évidemment $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R})$. Le problème de conjuguer f à une translation dans $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R})$ est élémentaire (voir XVII) et ne nous occupera pas sauf en XVII.

1. MESURES DE PROBABILITES

Si X est un espace topologique compact métrisable, si $f : X \to X$ est une application continue, et si $C^o(X)$ est l'espace des fonctions continues, muni de la topologie de la convergence uniforme, alors l'application linéaire

$$f^* : C^o(X) \to C^o(X),\ f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

est continue. De plus f_* l'application transposée sur le dual $(C^o(X))'$ (= espace des mesures de Radon sur X) est faiblement continue.

Définition : Une mesure est dite de probabilité sur X si $\mu \in (C^o(X))'$ $\mu \geq 0$ et $\mu(1) \equiv \mu(X) = 1$; μ est invariante par f, si $f_*\mu = \mu$.

Remarque : L'ensemble des mesures de probabilités sur X est convexe et faiblement compact (ou * faiblement compact).
Sur $\mathbb{R}^n$, $m = dx$ sera la mesure de Haar sur T^n. On écrira si $\varphi \in C^o(T^n)$

$$m(f) = \int_{T^n} \varphi \, dm = \int_{T^n} \varphi(x)\, dx$$

Rappelons le :

Théorème de Markov et Kakutani : Si f : X → X et g : X → X sont continues et vérifient $g \circ f = f \circ g$ (f et g commutent) alors il existe une mesure de probabilité μ sur X telle que $f_*\mu = g_*\mu = \mu$.

Démonstration : Voir Bourbaki [1].

2. NOMBRE DE ROTATION

2.1 Soit $f \in D^o(T^1)$, $f = Id + \varphi$ avec $\varphi \in C^o(T^1)$. On a par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = Id + \sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

Considérons la somme de Birkhoff

$$\frac{f^k - Id}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

2.2 Lemme : *Soit* $f = Id + \varphi \in D^o(T^1)$. *Soit* $M = \operatorname{Max}_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$ *et* $m = \operatorname{Min}_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$, *on a* $M - m < 1$.

Démonstration : Soit $x_M \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_M) = M$ et $x_m \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_m) = m$, avec $x_m \leq x_M$ et $x_M - x_m < 1$ (φ est $\mathbb{Z}$-périodique). On a

$$f(x_M) - f(x_m) < 1$$

Soit $M - m \leq 1 - (x_M - x_m) < 1$. ∎

2.3 Proposition : *Pour tout* $f \in D^o(T^1)$ *si* $k \to +\infty$, $\frac{f^k - Id}{k}$ *converge uniformément vers un nombre* $\rho(f) \in \mathbb{R}$ *appelé nombre de rotation de* f.

Démonstration : Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur T^1.

On a, puisque μ est invariante par $\bar{f}$: si $k \in \mathbb{N}$, $\mu(f^k - Id - k\mu(\varphi)) = 0$. Donc $f^k - Id - k\mu(\varphi)$ s'annule puisque μ est une mesure de probabilité. Or par le lemme 2.2 ,

$$\operatorname{Max}(f^k - Id - k\mu(\varphi)) - \operatorname{Min}(f^k - Id - k\mu(\varphi)) \leq 1$$

Il résulte que :

$$|f^k - Id - k\mu(\varphi)|_o < 1$$

(si $\varphi \in C^o(T^1)$ on a posé $|\varphi|_o = \operatorname{Max}_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$).

Soit

$$\left|\frac{f^k - Id}{k} - \mu(\varphi)\right|_o < \frac{1}{k}$$

Il suit que si $k \to +\infty$ $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers un nombre $\rho(f) = \mu(\varphi)$ et cela ne dépend donc pas du choix de μ. ∎

On a montré au passage :

2.4 Si $\rho(f) = \alpha$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ R_{-k\alpha}$ a un point fixe. Soit encore : $f^k - R_{k\alpha}$ s'annule en au moins un point $x_k \in \mathbb{R}$.

2.5 L'inégalité du nombre de rotation : si $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{|f^k - Id - k\alpha|_o < 1}$$

2.6 $\alpha = \rho(f) = \mu(\varphi) \equiv \int_{T^1} \varphi \, d\mu$ où μ est une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$.

2.7 Proposition : $\rho : D^o(T^1) \to \mathbb{R}$ est continue pour la C^o topologie.

Démonstration : Par 2.5, $\rho(f)$ est limite uniforme en f des applications continues $f \to \frac{f^k - Id}{k}$. ∎

2.8 On a maintenant si $R_\alpha : x \to x + \alpha$, $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

2.9 Si $p \in \mathbb{Z}$, on a $\rho(R_p \circ f) = p + \rho(f)$.

En général si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\rho(R_\lambda \circ f) \neq \lambda + \rho(f)$ voir III.2.7.

La propriété 2.9 affirme que ρ passe au quotient et définie une application continue (que l'on note encore ρ)
$\rho : Diff^o_+(T^1) \to T^1$.

2.10 Proposition (invariance de ρ par conjugaison) : f et $g \in D^o(T^1)$, on se donne $h = Id + \varphi$ avec $\varphi \in C^o(T^1)$ (h est non nécessairement un homéomorphisme) et suppose que $h \circ f = g \circ h$ alors $\rho(f) = \rho(g)$.

Démonstration : On a si $n \in \mathbb{N}$, $h \circ f^n = g^n \circ h$, donc
$f^n + \varphi \circ f^n = g^n \circ h - h + h$

soit $\frac{f^n - Id}{n} + \frac{\varphi \circ f^n}{n} = \frac{(g^n - Id)\circ h}{n} + \frac{\varphi}{n}$, si $n \to +\infty$. On en déduit que

$$\rho(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^n - Id}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{g^n - Id}{n} \circ h\right) = \rho(g). \quad \blacksquare$$

En particulier si $h \in D^0(T^1)$, on conclut que

$$\rho(f) = \rho(h^{-1} \circ g \circ h) = \rho(g)$$

Donc si $g = R_\alpha$ et si $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ alors $\rho(f) = \alpha$.

2.11 Proposition : Soient f et $g \in D^0(T^1)$ telles que $f \circ g = g \circ f$, alors $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)$.

Démonstration : On écrit $f = Id + \varphi$, $g = Id + \psi$. Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ et $\bar{g}$ (qui existe par le théorème de Markov et Kakutani) avec $\bar{f}$ et $\bar{g}$ les homéomorphismes induits sur T^1 par f et g. On a :

$$f \circ g = Id + \psi + \varphi \circ g$$

Par 2.6

$$\rho(f \circ g) = \mu(\psi + \varphi \circ g) = \mu(\psi) + \mu(\varphi) = \rho(f) + \rho(g). \quad \blacksquare$$

2.12 Remarque : Soient f et g dans $\mathrm{Diff}_0^0(T^n)$ avec $f \circ g = g \circ f$, et si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des relèvements de f et g à $D^0(T^n)$ alors $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

En effet soit μ une mesure de probabilité sur T^n invariante pour f et g et posons $\tilde{f} = Id + \varphi$ et $\tilde{g} = Id + \psi$. Comme $f \circ g = g \circ f$ alors $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f} + p$ avec $p \in \mathbb{Z}^n$. Il suffit de voir que $p = 0$. Or on a :

$$\mu(\tilde{f} \circ \tilde{g} - Id) = \mu(\varphi) + \mu(\psi) = \mu(\tilde{g} \circ \tilde{f} - Id)$$

donc on a bien $0 = \mu(p) = p$ et il suit que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. $\blacksquare$

3. GENERALITES SUR LA CONJUGAISON

3.1 Définition : Soient $0 \leq r \leq \omega$ et $0 \leq k \leq r$, $f \in D^r(T^n)$ (resp $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$); f est C^k-conjugué à R_α si f est conjugué à R_α dans $D^k(T^n)$ (resp $\mathrm{Diff}_o^k(T^n)$).

Remarquons qu'il est équivalent que $f \in D^r(T^n)$ soit C^r-conjugué à une translation et que $\bar{f}$ le soit.

3.2 Minimalité

Soit X un espace topologique compact et f un homéomorphisme de X.

Définition : f est minimal si tout ensemble fermé invariant par f est soit vide soit X (ou encore que l'orbite de tout point de X est dense).

Si f est conjugué dans le groupe des homéomorphismes de X à g et si f est minimal, alors g est minimal.

Exemple : Soit R_α une translation de T^n, alors R_α est minimal si et seulement si R_α est une translation ergodique.

3.3 Classe de différentiabilité de l'homéomorphisme qui conjugue à une translation ergodique

3.3.1 Lemme : Soit $f \in D^o(T^n)$ qui commute avec R_α, R_α sur T^n étant une translation ergodique, alors f est une translation.

Démonstration : Ecrivons $f = Id + \varphi$ avec $\varphi \in C^o(T^n, \mathbb{R}^n)$. On a $f \circ R_{k\alpha} = R_{k\alpha} \circ f$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ donc $\varphi \circ R_{k\alpha} = \varphi$, comme R_α est une translation ergodique sur T^n. On a $\varphi = C$ = constante $\in \mathbb{R}^n$ donc $f = R_C$. ∎

3.3.2 Proposition : Soit $f \in D^r(T^n)$ et $f = g_i^{-1} \circ R_\alpha \circ g_i$, $g_i \in D^o(T^n)$ pour i = 1,2; si R_α sur T^n est une translation ergodique, alors existe $C \in \mathbb{R}^n$ telle que $R_C \circ g_1 = g_2$.

Démonstration : $g_1^{-1} \circ R_\alpha \circ g_1 = g_2^{-1} \circ R_\alpha \circ g_2$, donc $g_2 \circ g_1^{-1}$ commute avec R_α, donc $g_2 = R_c \circ g_1$. ∎

Si $1 \leq r \leq \omega$, si $f \in D^r(T^n)$, et si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^0(T^n)$ et si R_α sur T^n est une translation ergodique, alors la classe de différentiabilité de g est indépendante du choix de g qui conjugue f à R_α.

3.3.3 Problème : L'objet de ce mémoire est voir le rapport entre la classe de différentiabilité de f et celle de g .

3.3.4 Soit le sous-groupe fermé de $D^r(T^n)$, $D^r(T^n,0) = \{g \in D^r(T^n) \mid g(0) = 0\}$ et de façon analogue, on définit $\mathrm{Diff}_o^r(T^n,0)$.

. Si R_α est sur T^n une translation ergodique et si $f \in D^r(T^n)$ est C^0- conjugué à R_α alors il existe un unique $g \in D^0(T^n,0)$ tel que $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. En effet si on a $f = g_1^{-1} \circ R_\alpha \circ g_1$ avec $g_1 \in D^0(T^n)$, il suffit de prendre $g = R_{-g_1(0)} \circ g_1$; g est unique par 3.3.2.

4. DEFINITIONS DE F_α^r , O_α^r et de $O_\alpha^{r,k}$, $0 \leq k \leq r$.

4.1 Définition F_α^r : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^1$, on pose

$$F_\alpha^0 = \{f \in D^0(T^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

=les homéomorphismes de nombre de rotation α. F_α^0 est fermé dans $D^0(T^1)$ puisque ρ est continue. On définit si $1 \leq r \leq \omega$

$$F_\alpha^r = F_\alpha^0 \cap D^r(T^1)$$

F_α^r est fermé dans $D^r(T^1)$ pour la C^r topologie. On pose

$$F_{\pi(\alpha)}^r = \{f \in \mathrm{Diff}_o^r(T^1) \mid \rho(f) = \pi(\alpha) \in T^1\}$$

Si $\pi : D^r(T^1) \to \mathrm{Diff}_o^r(T^1) \to \{1\}$ la projection canonique, on a évidemment pour $0 \leq r \leq \omega$ que π est homéomorphisme de F_α^r sur $\pi(F_\alpha^r) = F_{\pi(\alpha)}^r$.

(On a : $\rho : \mathrm{Diff}_+^0(T^1) \to T^1$ est un rétracté, et $\rho_* : \pi_1(\mathrm{Diff}_+^0(T^1)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(T^1) \cong \mathbb{Z}$).

On identifiera F^r_α avec $F^r_{\pi(\alpha)}$.

4.2 O^r_α l'orbite de R_α ♦

On pose si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $0 \leq r \leq \omega$

$$O^r_\alpha = \{g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \mid g \in D^r(T^1)\}$$

et

$$O^r_{\pi(\alpha)} = \{g \circ R_{\pi(\alpha)} \circ g^{-1} \mid g \in \mathrm{Diff}^r_o(T^1)\}$$

On a que π est homéomorphisme de O^r_α sur $O^r_{\pi(\alpha)}$ et on identifiera O^r_α avec $O^r_{\pi(\alpha)}$. On a par 2.10 l'invariance par conjugaison de ρ que $O^r_\alpha \subset F^r_\alpha$.

4.3 Définition de $O^{r,k}_\alpha$, $0 \leq k \leq r$

On pose si $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq r$

$$O^{r,k}_\alpha = O^k_\alpha \cap F^r_\alpha$$

$= \{$ difféomorphismes de classe C^r qui sont C^k conjugués à R_α $\}$ et $O^{r,r}_\alpha = O^r_\alpha$.

Ici encore π est homéomorphisme de $O^{r,k}_\alpha$ sur $O^{r,k}_{\pi(\alpha)}$ que l'on identifiera par la suite .

5. POINTS PERIODIQUES ET NOMBRE DE ROTATION

Soit $f \in D^0(T^1)$ et $\bar{f} = \pi(f)$. On a la

5.1 Définition : $\bar{f}$ a un point périodique d'ordre q, si $\bar{f}^q$ a un point fixe sur T^1.

5.2 Lemme : Soit $f \in D^0(T^1)$; on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, et $x_o \in \mathbb{R}$ tel que $f^q(x_o) = R_p(x_o)$ alors $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$.

♦ Si $f \in \mathrm{Diff}^r_+(T^1)$, $\rho(f) \neq 0$, si f est sur un groupe à un paramètre C^r, alors ce groupe φ_t à un paramètre est isomorphe à une action de T^1 (φ_t agit transitivement sur T^1, et le stabilisateur d'un point est $\mathbb{Z}$), et on voit facilement alors que f est C^r conjugué à R_α avec $\alpha = \rho(f)$.

Démonstration : On a si $n \in \mathbb{N}$, $f^{nq}(x_o) = x_o + np$ donc

$$\rho(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^{nq}(x_o) - x_o}{n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ . \ \blacksquare$$

On en déduit par 2.4

5.3 Proposition : Soit $f \in D^o(T^1)$ et $\pi(f) = \bar{f}$.

1) $\bar{f}$ a un point périodique d'ordre minimal q si $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p et q premiers entre eux, et de plus $\bar{f}^k$ est sans point fixe si k n'est pas un multiple de q.

2) $\rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ si et seulement $\bar{f}$ est sans point périodique.

6. CARACTERISATION DE $O^r_{p/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}$

Si $p/q \in \mathbb{Q}$ et $f = g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g$ avec $f \in D^r(T^1)$ et $g \in D^o(T^1)$ alors on a

$$f^q = R^p$$

Si $\bar{f}$ est sur T^1 un difféomorphisme périodique , $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Critère de conjugaison : Soient $0 \le r \le \omega$ et $f \in D^r(T^1)$ avec $\rho(f) = p/q$ alors f est C^r conjugué à $R_{p/q}$ si et seulement si $f^q = R_p$.

Démonstration : Soit $g = \frac{1}{q} \sum_{i=o}^{q-1} (f^i - i\frac{p}{q})$. Si $f \in D^r(T^1)$,alors $g \in D^r(T^1)$ et on a $g \circ f = R_{p/q} \circ g$,soit $f = g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g$. $\blacksquare$

On a donc $O^r_{p/q}$ est fermé dans $F^r_{p/q}$ pour la C^r topologie. Nous verrons en III.2.5 que $O^r_{p/q}$ est sans point intérieur dans $F^r_{p/q}$.

7. INTRODUCTION A L'ETUDE DE F_α^o si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

7.1 Semi-conjugaison

En général si $f \in D^o(T^1)$ et si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, f n'est pas C^o conjugué à R_α puisque $\bar{f}$ n'est pas minimal. Nous reprendrons de tels exemples dûs à Denjoy [2] et Bolh au chapitre X.3.8.

Néanmoins f est semi-conjugué au sens de la proposition suivante :

Proposition : Soit $f \in D^o(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ alors il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue monotone non décroissante et $g - Id \in C^o(T^1)$ (i.e. $\bar{g}$ sur T^1 de degré 1) telle que

$$g \circ f = R_\alpha \circ g .$$

Remarque : En "général" g n'est pas un homéomorphisme ainsi que nous l'avons rappelé et ainsi que nous le verrons en X.3.8 .

Démonstration : Soit μ une mesure de probabilité en T^1 invariante par $\bar{f}$ et donc par $\bar{f}^{-1}$, μ est sans masse atomique puisque $\bar{f}$ est point périodique.

Soit $g(x) = \int_o^x d\mu$. On a : g est continue non décroissante puisque $\mu \geq 0$ sans masse atomique ; $g(0) = 0$; $g(x+n) = g(x) + n$ si $n \in \mathbb{Z}$ puisque $\int_o^1 d\mu = \mu(1) = 1$.

Puisque $\bar{f}_* \mu = \mu$, on a :

$$g(f(x)) - g(f(0)) = g(x) - g(0) .$$

Si $C = g(f(0)) - g(0)$. On a $g \circ f = R_C \circ g$ et par 2.10, $C = \alpha = \rho(f)$. ∎

7.2 Sur le cantor invariant.

Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. On verra en 8.2 que μ est unique si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

7.2.1 Proposition : Sous les mêmes conditions que la proposition de 7.1, g est un homéomorphisme si et seulement si le support de μ est T^1.

Démonstration : En effet dans ce cas g est strictement monotone. ∎

7.2.2 Soit $F = \mathrm{supp}(\mu)$, F est un fermé invariant par f et sans isolé puisque μ est sans masse atomique. Si $F \neq T^1$ alors $\bar{f}$ n'est pas minimal et donc pas C^0 conjugué à R_α.

7.2.3 Proposition : Si $F \neq T^1$ alors F est un cantor de T^1 (i.e. un fermé sans points isolés, et d'intérieur vide), qui est l'unique ensemble minimal.

Démonstration : Soit $g(x) = \int_0^x d\mu$. Soit $\bar{g} : T^1 \to T^1$, on a $\bar{g}(F) = T^1$. $g|_F$ est injective sauf sur un ensemble dénombrable D de F (i.e. les extrémités des composantes connexes de $T^1 - F$). Soit M un ensemble fermé invariant par $\bar{f}$, $M \neq \emptyset$. On a par

$$\bar{g} \circ \bar{f} = R_\alpha \circ \bar{g},$$

que $\bar{g}(M)$ est invariant par R_α, donc $\bar{g}(M) = T^1$. Soit $M \supset F - D$. Comme l'adhérence de $F - D$ est F puisque F est sans point isolé, il suit que $M \supset F$. F est donc bien l'unique ensemble minimal invariant par $\bar{f}$.
On a $F \neq T^1$, alors $\mathrm{Int}(F) = \emptyset$ car sinon la frontière de Int(F) serait invariante par $\bar{f}$ et ne contiendrait pas F ; F est sans points isolés puisque μ est sans masse atomique : F est bien un cantor de T^1. ∎

7.2.4 Remarque : D est un ensemble dénombrable invariant par R_α. Le nombre d'orbites pour l'action de R_α est soit un, soit fini ou même dénombrable (voir Denjoy [2]).

8. UNIQUE ERGODICITE DES HOMEOMORPHISMES DE T^1 SANS POINT PERIODIQUE

8.1 Rappels (voir Furstenberg [1])

Soit X un espace métrique compact et $f : X \to X$ un homéomorphisme de X.

8.1.1 Définition : 1) f est uniquement ergodique si f a une unique mesure de probabilité invariante μ.

2) f est strictement ergodique si f est uniquement ergodiquede mesure invariante μ et si la μ-mesure de tout ouvert non vide et strictement positive.

Exemple : Une translation ergodique sur T^n est strictment ergodique, la mesure de probabilité invariante étant la mesure de Haar.*

On rappelle que $C^o(X)$ = espace des fonctions continues sur X.

8.1.2 Proposition : Les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1) f est uniquement ergodique de mesure probabilité invariante μ

2) l'espace des mesures de Radon invariante par f est de dimension 1.

3) L'adhérence de $\{\varphi \circ f - \varphi \mid \varphi \in C^o(X)\}$ dans $C^o(X)$ est hyperplan (une forme linéaire définissant cet hyperplan étant μ).

4) Pour tout $\varphi \in C^o(X)$, si $k \to +\infty$, $\frac{1}{k} \sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ f^i$ converge uniformément vers une constante $(= \mu(\varphi))$.

Démonstration : voir Furstenberg [1], c'est élémentaire.

8.2 On a la proposition due à Carlemann [1], Denjoy [1] et aussi Furstenberg [1]

Proposition : Soit $f \in \mathrm{Diff}^o_+(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f est uniquement ergodique.

Démonstration : Soit μ une mesure de probabilité invariante par f, soit $g(x) = \int_o^x d\mu$. On a par 7.1

$$\bar{g} \circ f = R_\alpha \circ \bar{g}$$

On a $\bar{g}_* \mu = m$ mesure de Haar de T^1. Soit μ_1 une autre mesure probabilité invariante par f, $\bar{g}_* \mu_1$ est invariante par R_α $(\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donc $\bar{g}_* \mu_1 = m$. On voit facilement que $\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\mu_1) = F$ directement, ou par 7.2.2 et 7.2.3 . Comme $\bar{g}_{|F}$ est injective sauf sur un ensemble au plus dénombrable de μ (et aussi de μ_1) mesure nulle, car μ et μ_1 sont sans

* Si $\mu(n)$ sont les coefficients de Fourier d'une mesure invariante par R_α $(\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ alors on a $\widehat{\mu(n)}(1 - e^{2\pi i n\alpha}) = 0$; soit μ = mesure de Haar de T^1.

masse atomique, on conclut que $\mu = \mu_1$. ∎

9. CRITERE DE C^0 CONJUGAISON A UNE ROTATION

On a le critère

Critère : Soit $f \in D^0(T^1)$, f est C^0 conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f)$) si et seulement s'il existe une suite $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \to +\infty$ tel que la suite $(f^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ soit équicontinue.

Démonstration : Il est élémentaire de voir que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante .

a) Cas $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$, si $\mathrm{supp}(\mu) = T^1$ alors par 7.2.1, $\bar{f}$ est C^0 conjugué à R_α, supposons par l'absurde que $\mathrm{supp}(\mu) \neq T^1$. Comme $F = \mathrm{supp}(\mu)$ est invariant $\bar{f}$, $T^1 - F$ est invariant par $\bar{f}$ et ouvert. Soit I_o une composante connexe de $T^1 - F$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{f}^n(I_o)$ est une composante connexe de $T^1 - F$ et puisque $\bar{f}$ est sans point périodique, les intervalles $(\bar{f}^n(I_o))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont tous disjoints. Si $n \to \pm\infty$ la longueur de $f^n(I_o)$ pour la métrique standard de T^1, $\| \ \|$, tend vers 0. Or $\bar{f}^{n_i} : \bar{f}^{-n_i}(I_o) \to I_o$ comme la longueur de $\bar{f}^{-n_i}(I_o)$ tend vers 0 si $i \to +\infty$, et ceci est contraire à l'équicontinuité de la suite $(\bar{f}^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x - y\| \leq \eta$ implique pour tout i, $\|f^{n_i}(x) - f^{n_i}(y)\| \leq \varepsilon$).

Donc par l'absurde $\mathrm{supp}(\mu) = T^1$: f est C^0 conjugué à R_α.

b) Cas $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

On a : la suite $(f^{n_i q})_{i \in \mathbb{N}}$ est équicontinue, et donc aussi $(f^{n_i q} - n_i p)$. Supposons que $f^q \neq R_p$; soit $a < b$ tels que

$$(f^q - p)(x) - x \neq 0 \quad \text{si} \quad x \in]a,b[$$

et

$$(f^q - p)(x) - x = 0 \quad \text{si} \quad x = a \text{ ou } b.$$

si $k \in \mathbb{N}$, $k \to +\infty$, $f^{kq} - kp$ converge simplement vers a si $(f^q - p)(x) < 0$

pour $x \in]a,b[$ et b si $(f^q - p)(x) > 0$ pour $x \in]a,b[$) ; la limite simple sur $[a\,b]$ de $f^{kq} - kp$ n'est pas continue sur $[a,b]$. Donc $(f^{n_i} - n_i p)$ n'est pas équicontinue et par l'absurde, on a $f^q = R_p$, et on applique alors 6. ∎

CHAPITRE III

ETUDE DES FERMES DE NOMBRE DE ROTATION CONSTANT

Plan :

1. Généralités sur $\lambda \to \rho(R_\lambda \circ f)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
2. Etude de $F^r_{p/q}$, $0 \le r \le \omega$, $p/q \in \mathbb{Q}$.
3. Exemple de familles.
4. Topologie de F^r_α $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ dans $D^r(T^1)$.
   - 4.1 Proposition.
   - 4.2 Les fonctions λ_α , $\lambda_{p_+/q}$ et $\lambda_{p_-/q}$.
   - 4.3 Connexité de F^r_α , $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
   - 4.4 Densité.
   - 4.5 Une propriété générique : la propriété A_r .
5. Un cantor $K_f = [0,1] - \mathrm{Int}\{\lambda \mid \rho(R_\lambda \circ f) \in \mathbb{Q}\}$ pour f ayant la propriété A_r .
6. Topologie des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnels
   - 6.1 Définition de F^r.
   - 6.2 Topologie de F^r.
   - 6.3 Densité.

Commentaire :

Ce chapitre est consacré à l'étude de la topologie des fermés F^r_α dans $D^r(T^1)$. C'est V.I. Arnold qui, le premier à notre connaissance, entreprit cette étude, qui est d'ailleurs élémentaire. La définition des semi-stables, ainsi que la proposition 4.1.1,sont de V.I. Arnold. Nous reprenons cette étude pour en donner des démonstrations qui restent valables dans le cas C^o et C^1.

L'exemple 3.4 est de J. Moser (la démonstration est de nous). La connexité de F^r_α $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ est de F. Sergeraert (la démonstration est de nous). La proposition 3.2 est une réponse à une question de V.I. Arnold [1].

On peut dire que ce chapitre est consacré à l'étude pour

$0 < |a| < \frac{1}{2\pi}$ fixé, de $\lambda \to f_\lambda(x) = x + a \sin 2\pi x + \lambda \in D^\omega(T^1)$ ou plus précisément de $\lambda \to \rho(f_\lambda) = h(\lambda)$. Nous conseillons au lecteur de garder cet exemple constamment à l'esprit, cet exemple étant générique par 4.5.

On étudie en 1 des généralités sur $\lambda \to \rho(f_\lambda)$. En 2 on étudie $F^r_{p/q}$. On verra en 3.2, que pour tout p/q (Int $(F^r_{p/q}) = U^r_{p/q} \neq \emptyset$ (intérieur dans $D^r(T^1)$)) et que la frontière de $F^r_{p/q}$ dans $D^r(T^1)$ est les semi-stables : $F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q}$. En 3 on montre en particulier pour $\lambda \to h(\lambda) = \rho(f_\lambda)$ avec $f_\lambda(x) = x + a \sin 2\pi x + \lambda$, qu'alors h vérifie, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide. On montre en 4.5 que cette propriété, propriété équivalente à la propriété A_r, est générique dans $D^r(T^1)$ pour tout $0 \leq r \leq \omega$.

Les propositions les plus importantes sont les suivantes : 4.1 implique pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et tout $f \in D^0(T^1)$ il existe un unique $\lambda_\alpha(f)$ tel que $\rho(R_{\lambda_\alpha(f)} \circ f) = \alpha$. Et il en résulte en 4.4 que, pour tout $0 \leq r \leq \omega$, tout $r \leq k$ et tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, F^k_α est dense dans F^r_α pour la C^r-topologie.

En 5, toujours avec $f(x) = x + a \sin 2\pi x$, on montre que $K_f = [0,1] - \text{Int}(h^{-1}(\mathbb{Q}))$ est un cantor de $[0,1]$.

En 6, on étudie $F^r = D^r(T^1) - \text{Int}\ \rho^{-1}(\mathbb{Q})$. On montre en 6.2 que $D^r(T^1) \cap \text{Int}\ \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est un ouvert dense de la C^r-topologie $D^r(T^1)$ (pour tout $0 \leq r \leq \omega$). Si $r \geq 1$, Int $\rho^{-1}(\mathbb{Q}) \cap D^r(T^1)$ contient un ouvert dense de difféomorphismes structurellement stables (voir Arnold [1]), mais du point de vue de la conjugaison différentiable, la stabilité structurelle est une illusion; si f est structurellement stable, alors son orbite C^1 est de codimension infinie.

Pour le problème de "la mesure" de Int $\rho^{-1}(\mathbb{Q}) \cap D^r(T^1)$ nous renvoyons à Arnold [1] (il étudie la famille $\lambda \to f_\lambda(x) = x + a \sin 2\pi x + \lambda$).

***

1. GENERALITES SUR $\lambda \to \rho(R_\lambda \circ f)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

1.1 Soit $0 \le r \le \omega$ et $f \in D^r(T^1)$; alors, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$R_\lambda \circ f \in D^r(T^1) \quad .$$

Posons $\lambda \to \rho(R_\lambda \circ f) = h(\lambda)$; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par la continuité de ρ (II.2.7) et on a

$$h(\lambda + n) = n + h(\lambda) \qquad \text{si } n \in \mathbb{Z} .$$

1.2 Si $g_1, g_2 \in C^0(\mathbb{R})$, on dit que $g_1 \le g_2$ (resp. $g_1 < g_2$) si $g_2 - g_1 \ge 0$ (resp. $g_2 - g_1 > 0$).
Si g_1 et g_2 sont monotones strictement croissantes, on a : si $g_1 < g_2$ et $x \le y$, alors pour un entier $n \ge 1$, $g_1^n(x) < g_2^n(y)$.

1.3 Il suit que l'on a la
Proposition : $h \to h(\lambda)$ est continue, monotone non décroissante, et $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Démonstration : On a, si $\lambda_1 < \lambda_2$ et si $n \ge 1$ est entier,

$$(R_{\lambda_1} \circ f)^n < (R_{\lambda_2} \circ f)^n$$

donc

$$\rho(R_{\lambda_1} \circ f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(R_{\lambda_1} \circ f)^n - Id}{n} \le \lim_{n \to +\infty} \frac{(R_{\lambda_2} \circ f)^n - Id}{n} = \rho(R_{\lambda_2} \circ f) .$$

h est donc bien monotone non décroissante, et la proposition résulte de 1.1. ∎

1.4 Proposition : On a pour tout entier n
si $\lambda > 0$ $\qquad (R_\lambda \circ f^n) \le (R_\lambda \circ f)^n$
si $\lambda < 0$ $\qquad (R_\lambda \circ f)^n \le R_\lambda \circ f^n$.

Démonstration : Supposons que $\lambda > 0$ (la démonstration est analogue si $\lambda > 0$).

On démontre la proposition par récurrence sur n. C'est vrai pour n = 1. Le cas n-1 donne

$$R_\lambda \circ f^{n-1} \leq (R_\lambda \circ f)^{n-1} \quad .$$

Comme $f < R_\lambda \circ f$, on a donc

$$(R_\lambda \circ f^{n-1}) \circ f \leq (R_\lambda \circ f)^{n-1} \circ (R_\lambda \circ f) \quad ,$$

soit

$$R_\lambda \circ f^{n} \leq (R_\lambda \circ f)^{n+1} \quad .$$

Donc on a la proposition pour n par récurrence. ∎

2. ETUDE DE $F^r_{p/q} = \{f \in D^r(T^1) \mid \rho(f) = p/q\}$, $0 \leq r \leq \omega$, $p/q \in \mathbb{Q}$.

2.1 Si $f \in F^r_{p/q}$, alors $f^q - R_p$ s'annule par II.2.4. Soit $U^r_{p/q} = \{f \in F^r_{p/q} \mid f^q - R_p$ s'annule en changeant de signe$\}$. Evidemment, $U^r_{p/q}$ est ouvert dans la C^r-topologie dans $D^r(T^1)$. Nous verrons en 3.2 et 3.3 que pour tout $0 \leq r \leq \omega$ et tout $p/q \in \mathbb{Q}$:

$$U^r_{p/q} \neq \emptyset \quad .$$

2.2 On a les définitions suivantes qui sont dues à Arnold [1] et qui donnent la frontière de Int $F^r_{p/q}$ dans $D^r(T^1)$.

Définition : On a les semi-stables en avant

$$F^r_{p_+/q} = \{f \in F^r_{p/q} \mid f^q - R_p \geq 0\}$$

et les semi-stables en arrière

$$F^r_{p_-/q} = \{f \in F^r_{p/q} \mid f^q - R_p \leq 0\} \quad .$$

2.3 On a que $F^r_{p_+/q}$ et $F^r_{p_-/q}$ sont fermés dans $D^r(T)$ pour la C^r-topologie.

2.4 La proposition suivante montre que $F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q}$ est dans la frontière de Int$(F^r_{p/q})$.

Proposition : Si $f \in F^r_{p_+/q}$ (resp. $F^r_{p_-/q}$), alors si $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), on a $\rho(R_\lambda \circ f) > \rho(f) = p/q$ (resp. $\rho(R_\lambda \circ f) < \rho(f)$).

Démonstration : On suppose que $f \in F^r_{p_+/q}$ (l'autre cas étant analogue). Comme, si $\lambda > 0$, on a $\rho(R_\lambda \circ f) \geq \rho(f)$, il suffit de voir que $\rho(R_\lambda \circ f) \neq R_{p/q}$. Or $(R_\lambda \circ f)^q > f^q \geq R_p$, donc comme $(R_\lambda \circ f)^q - R_p$ ne s'annule pas, on a $\rho(R_\lambda \circ f) \neq p/q$. Il suit $\rho(R_\lambda \circ f) > \rho(f)$. ∎

2.5 On a $F^r_{p/q} = U^r_{p/q} \amalg (F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q})$.

Proposition : La frontière de $F^r_{p/q}$ dans $D^r(T^1)$ est $F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q}$.

Démonstration : Comme $U^r_{p/q}$ est ouvert dans $D^r(T^1)$ et que $F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q} \subset$ Frontière de $(F^r_{p/q})$, on a bien la proposition. ∎

2.6 $f \in F^r_{p_+/q} \cap F^r_{p_-/q}$ est équivalent à $f^q = R_p$, donc par II.6 on a

$$F^r_{p_+/q} \cap F^r_{p_-/q} = O^r_{p/q} \quad .$$

2.7 Considérons $\lambda \to h(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ f)$. Comme $F^r_{p/q}$ a un intérieur non vide (voir 3.2) et que $h(\lambda)$ est monotone et continue, $h^{-1}(p/q) = [a,b] \subset \mathbb{R}$ avec en général $a \neq b$. On a évidemment

$R_b \circ f$ est semi-stable en avant

$R_a \circ f$ est semi-stable en arrière.

Et on a donc que $h^{-1}(p/q) =$ un point $= a = b$ est équivalent à $(R_a \circ f)^q = R_p$ ou encore $R_a \circ f \in O^r_{p/q}$. Soit f avec $\rho(R_\lambda \circ f) = p/q$ et $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$, alors $h^{-1}(p/q) = [a,b]$ avec $a \neq b$ et de plus si $\lambda \in]a,b[$, $R_\lambda \circ f \in \mathrm{Int}(F^r_{p/q})$. On a donc la

Proposition : Soit $f \in D^r(T^1)$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$, alors pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide.

3. EXEMPLES DE FAMILLES.

3.1 Soit $\varphi \in C^\omega(T^1)$, φ est entière si $\varphi(x)$ se prolonge en $\bar{\varphi}(z)$ fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\,\mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ et $z = x + iy$, $\bar{\varphi}(z) = \varphi(x+iy)$ ($\bar{\varphi}$ est la complexifiée de φ). Si $\sigma(z) = x - iy$, on a $\sigma \circ \bar{\varphi}(z) = \bar{\varphi}(\sigma(z))$. De plus $\varphi \equiv 0$ implique $\bar{\varphi} \equiv 0$.

3.2 Proposition : Soit $f = Id + \varphi \in D^\omega(T^1)$, avec $\varphi \in C^\omega(T^1)$, φ se prolongeant en une fonction entière (par exemple : polynôme trigonométrique). Alors si φ n'est pas constante et si $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, alors $f^q \neq R_p$.

Démonstration : Par l'absurde. f se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $f(z) = z + \bar{\varphi}(z)$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^q(x) = R_p(x) = x+p$, on a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f^q(z) = z+p = R_p(z)$, d'où on a, sur $\mathbb{C}$,

$$(R_{-p} \circ f^{q-1}) \circ f = Id_{\mathbb{C}} \quad .$$

Comme la composée des fonctions entières est entière, ceci implique que f est un difféomorphisme biholomorphe de $\mathbb{C}$. Or il est classique que les seuls difféomorphismes biholomorphes de $\mathbb{C}$ sont de la forme

$$f(z) = \alpha z + b \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}^* \quad .$$

Comme $f = Id + \varphi$, on a : φ est constante et , par l'absurde, il en résulte la proposition. ∎

3.3 Si $f = Id + \varphi \in D^\omega(T^1)$ avec φ un polynôme trigonométrique non constant, alors si $h(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ f)$, on a pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide par 2.7. Par exemple, si $0 < |a| < \frac{1}{2\pi}$, $f_a(x) = x + a \sin 2\pi x$ convient.

3.4 Exemple des fractions rationnelles.

$PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{-1,1\}$ agit sur $P_1(\mathbb{C})$ et aussi sur $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ par $z \to e^{2\pi i\lambda} \cdot \frac{(z-a)}{1-\bar{a}z}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$. Soit la fraction rationnelle

$g_\lambda : z \to e^{2\pi i\lambda} \cdot z \cdot \frac{(z-a)}{(1-\bar{a}z)} \cdot \frac{(1-\bar{b}z)}{(z-b)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$, $|b| < 1$, g_λ laisse invariant $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $g_\lambda : S^1 \to S^1$ est une application de degré 1. Si a et b sont suffisamment voisins de 0, g_λ induit sur S^1 un difféomor-

phisme C^ω. Si λ varie dans $\mathbb{R}$, $\rho(g_\lambda)$ prend toutes les valeurs de T^1.

Proposition : Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fraction rationnelle qui induit sur S^1 un difféomorphisme $\mathbb{C}^\omega$ qui préserve l'orientation. Si $g \notin PSL(2,\mathbb{R})$ et si $\rho(g) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec $\rho(g) = p/q \pmod 1$, alors on a

$$g^q \neq Id \ .$$

Démonstration : g définit une application holomorphe de $P_1(\mathbb{C})$ dans lui-même. Si $g^q_{S^1} = Id$, alors g est une application biholomorphe de $P_1(\mathbb{C})$, on a par conséquent $g \in PGL(2,\mathbb{C})$ $(g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0)$, puisque g laisse invariant S^1, $g \in PSL(2,\mathbb{R})$ et par l'absurde, il résulte la proposition. (Attention à $z \to 1/z$ qui ne préserve pas l'orientation sur S^1.) ∎

4. TOPOLOGIE DE F^r_α $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ dans $D^r(T^1)$.

4.1 La proposition suivante, due à Arnold [1], permet d'affirmer qu'en un "sens intuitif" F^r_α $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ est de codimension 1.

4.1.1 Proposition : Soit $D^o(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f)$ implique que $\lambda = 0$.

4.1.2 Remarque : Cela signifie que la fonction $h(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ f)$ prend chaque valeur $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ une et une seule fois.

Nous allons donner d'abord une démonstration si f est C^o-conjugué à R_α. Pour cela, on a le

4.1.3 Lemme : Soient f_1 et $f_2 \in D^o(T^1)$ avec $\rho(f_1) = \rho(f_2) = \alpha \in \mathbb{R}$. Si f_2 est C^o-conjugué à R_α, alors $f_1 \circ f_2^{-1}$ a un point fixe.

Démonstration : Par conjugaison, il suffit de montrer que $f_1 \circ R_{-\alpha}$ a un point fixe, or cela résulte de II.2.4. ∎

Démonstration de 4.1.1 si f est C^o-conjugué à R_α : Par le lemme 4.1.3, on conclut alors, si $R_\lambda \circ f = f_1$ avec $f = f_2$, que $R_\lambda = f_1 \circ f_2^{-1}$ a un point fixe, soit $\lambda = 0$. ∎

Pour démontrer 4.1.1 si f n'est pas C^o-conjuguée, nous allons utiliser la minimalité de $\bar{f}$ sur (l'unique) cantor minimal invariant.

On suppose dans le lemme suivant que f n'est pas C^0-conjugué à R_α, mais le lemme reste valable si f l'est.

4.1.4 Lemme : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ (resp. $p_1 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$) tel que

$$x - \varepsilon + p < f^n(x) < x + p \tag{1}$$

$$(\text{resp. } x + p_1 < f^{n_1}(x) < x + \varepsilon + p_1) \quad . \tag{2}$$

Démonstration : Par II.7.1 et 7.2, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = Id + \varphi$, $\varphi \in C^0(T^1)$, g continue, monotone non décroissante et telle que

$$g \circ f = R_\alpha \circ g \quad .$$

On suppose que g n'est pas un homéomorphisme.
Soit, sur T^1, F l'unique ensemble minimal invariant par $\bar{f}$ (support d'une unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$). $\bar{g}$ est constante sur chaque composante connexe de $T^1 - F$; soit D les extrémités de composantes connexes de $T^1 - F$. Soit $x \in F - D$. Comme F est un ensemble minimal pour $\bar{f}$, $\{\bar{f}^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans F.
Comme $\bar{g}_{|F}$ est injective, sauf sur D, et qu'on a $\bar{g} \circ \bar{f}^n(x) = R_{n\alpha} \circ \bar{g}(x)$. On a,en ordonnant T^1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ (resp. $n_1 \in \mathbb{N}$) tel que

$$x - \varepsilon < \bar{f}^n(x) < x$$

$$(\text{resp. } x < \bar{f}^{n_1}(x) < x + \varepsilon) \quad .$$

En relevant à $\mathbb{R}$ il en résulte le lemme. ∎

Démonstration de 4.1.1 si f n'est pas C^0-conjugué à R_α : Pour tout $\varepsilon > 0$ (resp. $\varepsilon < 0$), on va trouver λ_o avec $0 < \lambda_o \leq \varepsilon$ (resp. $\varepsilon \leq \lambda_o < 0$) tel que $\rho(R_{\lambda_o} \circ f) \in \mathbb{Q}$, donc $\rho(R_{\lambda_o} \circ f) \neq \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Comme $\lambda \to \rho(R_\lambda \circ f)$ est monotone non décroissante, on aura bien $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f)$ implique $\lambda = 0$ (i.e. pour $\lambda = 0$ $\lambda \to \rho(R_\lambda \circ f)$ est strictement monotone si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)). Considérons $\varepsilon > 0$ et $(R_\varepsilon \circ f)^n$. On a d'après 1.4, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(R_\varepsilon \circ f)^n(x) \geq \varepsilon + f^n(x) \quad .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, soient x et n donnés par le lemme 4.1.4; on a $\varepsilon + f^n(x) \geq x + p$, et aussi $f^n(x) < x + p$. Comme $\lambda \in [0,\varepsilon] \to (R_\lambda \circ f^n)(x) \in \mathbb{R}$ est continue en λ (par la continuité $\lambda \to (R_\lambda \circ f)^n$) et comme $f^n(x) = (R_o \circ f)^n(x) < x + p$ et $(R_\varepsilon \circ f)^n(x) \geq x + p$, il existe λ_o par le théorème de la valeur intermédiaire tel que

$$(R_{\lambda_o} \circ f)^n(x) = x + p \quad .$$

Donc $\rho(R_{\lambda_o} \circ f) = p/q \in \mathbb{Q}$.

La même démonstration marche si $\varepsilon < 0$, en utilisant 1.4 et le lemme 4.1.4. ∎

4.2 Les fonctions λ_α, $\lambda_{p_+/q}$ et $\lambda_{p_-/q}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou $p/q \in \mathbb{Q}$ fixé. On définit les fonctions $\lambda_\alpha(f)$ (resp. $\lambda_{p_+/q}(f)$, $\lambda_{p_-/q}(f)$) qui à $f \in D^r(T^1)$ associent l'unique nombre réel $\lambda_\alpha(f)$ (resp. $\lambda_{p_+/q}(f)$, $\lambda_{p_-/q}(f)$) tel que $R_{\lambda_\alpha(f)} \circ f \in F^r_\alpha$ (resp. $R_{\lambda_{p_+/q}(f)} \circ f \in F^r_{p_+/q}$ et $R_{\lambda_{p_-/q}(f)} \circ f \in F^r_{p_-/q}$).

Remarquons que ces fonctions existent par 1.3 et sont univoques par 4.1.1 (resp. 2.7).

4.2.1 Proposition : Pour $0 \leq r \leq \omega$, les fonctions λ_α (resp. $\lambda_{p_+/q}$, $\lambda_{p_-/q}$) sont continues de $D^r(T^1)$ dans $\mathbb{R}$ pour la C^r-topologie.

Pour démontrer la proposition, nous utiliserons le lemme suivant, lemme bien connu, dont nous laissons la démonstration en exercice.

4.2.2 Lemme : Soit X un espace topologique métrisable, et K un compact métrisable, et $f : X \to K$ une application de graphe fermé; alors f est continue.

Démonstration de 4.2.1 : On peut supposer que $\rho(f) \in [-1,1]$ ainsi que α ou p/q dans $[-1,1]$. Puisque pour tout $f \in D^0(T^1)$ on a $\rho(f + n) = n + \rho(f)$ si $n \in \mathbb{Z}$, on voit alors que $\lambda_\alpha(f)$ (resp. $\lambda_{p_+/q}(f)$, $\lambda_{p_-/q}(f)$) sont dans $[-3,+3]$. Montrons que le graphe de $\lambda_{p_+/q}(f)$ est fermé dans $A = \rho^{-1}[-1,1] \cap D^r(T^1) \times [-3,+3]$. Si $(f,\lambda) \in A$, alors $(f,\lambda) \in$ graphe de $(\lambda_{p_+/q})$ si et seulement si $R_\lambda \circ f \in F^r_{p_+/q}$.

Comme $F^r_{p_+/q}$ est fermé dans $D^r(T^1)$ pour la C^r-topologie et que l'application $(f,\lambda) \to R_\lambda \circ f$ est continue, le graphe $\lambda_{p_+/q}$ est bien fermé, donc $\lambda_{p_+/q}$ est continue de $\rho^{-1}[-1,+1] \cap D^r(T^1)$ dans $\mathbb{R}$ (par 4.2.2), et il suit que $\lambda_{p_+/q} : D^r(T^1) \to \mathbb{R}$ est bien continue.
On montre de même que λ_α (resp. $\lambda_{p_-/q}$) est continue. ∎

4.3 Connexité de F^r_α, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Pour la connexité de $F_{p_+/q}$ et $F_{p_-/q}$ etc., je renvoie à Arnold [1].
On a la proposition suivante qui est due à Sergeraert.

Proposition : Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et si $0 \le r \le \omega$, alors F^r_α est contractile dans la C^r topologie.

Démonstration : On suppose que $\alpha \in]0,1[$. Si $f = Id + \varphi \in F^r_\alpha$, alors $\varphi > 0$. Si $0 \le t \le 1$, alors $f_t = Id + t\varphi$ est un chemin continu dans la C^r-topologie dans $D^r(T^1)$, et $0 \le \rho(f_t) \le \rho(f) = \alpha$.
Soit $(t,f) \to R_{\lambda_\alpha(f_t)} \circ f_t$. C'est une rétraction par déformation de F^r_α (dans F^r_α) sur R_α.
4.4 Densité.
4.4.1 Soit $f_i \in D^\omega(T^1)$ pour $i \in \mathbb{N}$, avec $f_i = Id + \varphi_i$, φ_i étant des polynômes trigonométriques non constants à coefficients rationnels. Alors la suite $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un ensemble dénombrable dense dans $D^r(T^1)$ pour la C^r-topologie. On a la

4.4.2 Proposition : Pour tout $0 \le r \le \omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, si $k \ge r$ $(r \le k \le \omega)$ F^k_α est dense dans F^r_α pour la C^r-topologie, précisément, considérons

$$g_i = R_{\lambda_\alpha(f_i)} \circ f_i \quad ;$$

alors $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans F^r_α pour la C^r-topologie.

Démonstration : Soit l'application continue surjective

$$\psi : f \in D^r(T^n) \longrightarrow R_{\lambda_\alpha(f)} \circ f \in F^r_\alpha \quad .$$

Il suit que l'image par ψ d'un ensemble dense est dense; on a donc : $\psi(D^k(T^1)) \subset F^k_\alpha$ est dense dans F^r_α, et de même $\psi((f_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est donc dense F^r_α pour la C^r-topologie. ∎

4.4.3 Proposition : Soit $0 \leq r \leq \omega$ et $p/q \in \mathbb{Q}$. Soit $g_i = R_{\lambda_{p_+/q}(f_i)} \circ f_i$ (resp. $R_{\lambda_{p_-/q}(f_i)} \circ f_i$). Alors la suite (g_i) est dense dans $F^r_{p_+/q}$ (resp. $F^r_{p_-/q}$) pour la C^r-topologie.

Démonstration : Identique à celle de 4.4.2. ∎

Remarque : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, g_i a un nombre finis de points périodiques sur $[0,1]$ (i.e. $g_i^q - R_p$ a un nombre fini de zéros sur $[0,1]$ par 3.2 (et le fait que g_i est $\mathbb{R}$-analytique).

4.5 Une propriété générique : la propriété A_r.
Soit $0 \leq r \leq \omega$. $f \in D^r(T^1)$ a la propriété A_r si, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$.

Remarque : S'il existe λ tel que $(R_\lambda \circ f)^q = R_p$, alors λ est unique par 2.7 (et aussi par 4.1.3).

Proposition : Soit $0 \leq r \leq \omega$, la propriété A_r est générique dans $D^r(T^1)$ pour la C^r-topologie.

Démonstration : Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ et $G^r_{p/q} = \{f \in D^r(T^1) \mid (R_{\lambda_{p_+/q}(f)} \circ f)^q = R_p\}$.

$G^r_{p/q}$ est fermé dans la C^r-topologie dans $D^r(T^1)$. Remarquons, puisque si $(R_\lambda \circ f)^q = R_p$ ne peut être vérifiée que par au plus un λ, que l'on a $G^r_{p/q} = \{f \in D^r(T^1) \mid$ il existe λ tel que $(R_\lambda \circ f)^q = R_p\}$. On a donc : $U^r_{p/q} = D^r(T^1) - G^r_{p/q}$ est ouvert, dense par 3.2. L'ensemble des points de $D^r(T^1)$ où A_r est vraie est $\bigcap_{p/q \in \mathbb{Q}} U^r_{p/q}$, qui est donc résiduel dans $D^r(T^1)$. ∎

5. UN CANTOR $K_f = [0,1] - \mathrm{Int}\{\lambda \mid \rho(R_\lambda \circ f) \in \mathbb{Q}\}$ POUR f AYANT LA PROPRIETE A_r.

5.1 Soit $f \in D^r(T^1)$, f satisfaisant la propriété A_r, par exemple $f = \mathrm{Id} + \varphi \in D^\omega(T)$ avec φ un polynôme trigonométrique non constant. L'exemple "canonique" est, si $0 < |a| < 1/2\pi$,

$$f_a(x) = x + a \sin 2\pi x \quad .$$

On suppose que f n'est pas semi-stable.
Soit $h : \lambda \to \rho(R_\lambda \circ f)$. Alors h est continue, monotone non décroissante, $h(\lambda + n) = n + h(\lambda)$ si $n \in \mathbb{Z}$, et, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $h^{-1}(p/q)$ est un intervalle d'intérieur non vide (par 2.7), de plus, si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $h^{-1}(\alpha)$ est un point (i.e. h est strictement monotone en $h^{-1}(\alpha)$) par 4.1.
Soit $K_f = [0,1] - \mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbb{Q}))$. K_f est fermé dans $[0,1]$. Si $f_a(x) = x + a \sin 2\pi x$, on posera

$$K_a = K_{f_a} .$$

5.2 Proposition : Soit $f \in D^r(T^1)$, f ayant la propriété A_r, f non semi-stable, alors $K_f = [0,1] - \mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbb{Q}))$ est un cantor, et si $D = K_f \cap h^{-1}(\mathbb{Q})$ D est un ensemble dénombrable dense dans K_f.

Démonstration : K_f est fermé, sans point isolé par 2.2, 2.7, 4.1.1 ; (0 ou 1 ne sont pas isolés puisque f n'est pas semi-stable par hypothèse). K_f est donc un cantor de $[0,1]$ (i.e. homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor).
D est l'ensemble desvaleursde λ tel que $R_\lambda \circ f$ est semi-stable : c'est les extrémités des composantes connexes de $\mathrm{Int}(h^{-1}(\mathbb{Q}))$, ainsi qu'il est bien connu, il est dense dans K_f. ∎

5.3 Soit f comme dans la proposition 5.2. $h : K_f \to [0,1]$ est continue surjective, de plus (par 4.1.1) $h : (K_f - D) \to ([0,1] - \mathbb{Q})$ est injective.

Proposition : a) Soit B un ensemble dense dans $[0,1]$; alors $h^{-1}(B) \cap K_f$ est dense dans K_f ;

b) soit $G \subset K_f$ un ensemble résiduel, alors h(G) est résiduel dans $[0,1]$.

Démonstration : a) Si $h^{-1}(B) \cap K_f$ n'est pas dense, il existe a et b avec $h(a) \neq h(b)$, avec a et b dans $[0,1]$, tels que $(h^{-1}(B) \cap K_f) \cap [a,b] = \emptyset$. Or, comme h est monotone, on a $B \cap]h(a), h(b)[= \emptyset$. Comme $h(a) \neq h(b)$, B ne serait pas dense dans $[0,1]$, ce qui est absurde.

b) On peut évidemment se limiter au cas où G est un G_δ dense. Soit $G_1 = G - D$ $(D = h^{-1}(\mathbb{Q}) \cap K_f)$. G_1 est résiduel et c'est même un G_δ puisque D est maigre (puisque D est dénombrable et que K_f est sans point isolé). G_1 est donc dense dans K_f, il suit que $h(G_1)$ est dense dans $[0,1]$. $K_f - G_1$ est un F_σ (un réunion dénombrable de compact), il résulte que

$h(K_f - G_1)$ est un F_σ.
Comme $h(G_1) \cap h(K_f - G_1) = \emptyset$ (puisque h est injective sur $K_f - D$ et que $h(D) \cap h(K_f - D) = \emptyset$), il résulte que $h(K_f - G_1)$ est un F_σ sans point intérieur dans $[0,1]$.
On a bien que $h(G_1)$ est résiduel, et donc que $h(G) \supset h(G_1)$ est même un G_δ dense. ■

6. TOPOLOGIE DES DIFFEOMORPHISMES DE NOMBRES DE ROTATIONS IRRATIONNELS.

6.1 Définition de F^r.

Soit $0 \leq r \leq \omega$. On pose $F^r = D^r(T^1) - \text{Int } \rho^{-1}(\mathbb{Q})$. Evidemment F^r est fermé dans $D^r(T^1)$ pour la C^r-topologie. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on a

$$F^r_\alpha \subset F^r$$

et pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$

$$F^r \cap F^r_{p/q} = F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q} \quad .$$

On a, si $f \in D^r(T^1)$ et si f est C^0 conjugué à une translation, $f \in F^r$ (voir II.6).

6.2 Topologie de F^r dans $D^r(T^1)$.

6.2.1 Proposition : *Pour tout* $0 \leq r \leq \omega$, F^r *est un fermé sans point intérieur dans* $D^r(T^1)$. *(Soit encore* Int $\rho^{-1}(\mathbb{Q}) \cap D^r(T^1)$ *est un ouvert dense dans la* C^r*-topologie.)*

Démonstration : Supposons par l'absurde que U est un ouvert non vide de $D^r(T^1)$, $U \subset F^r$.
Soit $f = Id + \varphi \in D^\omega$ avec φ un polynôme trigonométrique non constant, et $f \in U$.
Par 5.1 et 5.2, $\{\lambda | R_\lambda \circ f \in F^r\}$ est un fermé sans point intérieur égal à l'ensemble $\mathbb{R}$ - Int$\{\lambda | \rho(R_\lambda \circ f) \in \mathbb{Q}\}$. On aurait, si $U \neq \emptyset$, que $\{\lambda | R_\lambda \circ f \in U\}$ serait ouvert, donc par l'absurde, F^r est sans point intérieur dans $D^r(T^1)$. ■

6.2.2 Proposition : *Pour tout* $0 \leq r \leq \omega$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *(resp.* $p/q \in \mathbb{Q}$*),* F^r_α *(resp.* $F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q}$*) est un fermé sans point intérieur dans* F^r *pour la* C^r*-topologie.*

Démonstration : Cela résulte immédiatement de 2.4 et 4.1.1. ∎

6.2.3 Proposition : Pour $0 \le r \le +\infty$, $F^r - \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est résiduel dans F^r pour la C^r-topologie.

Démonstration : $\rho^{-1}(\mathbb{Q}) \cap F^r = \bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} \left(F^r_{p_+/q} \cup F^r_{p_-/q} \right)$ est une réunion dénombrable de fermés sans point intérieur. Il résulte que $F^r - \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est G_δ, dense dans la C^r-topologie. ∎

6.3 Densité.
Soit $P(T^1) = \{f = Id + \varphi \in C^\omega(T^1) \mid \varphi$ est un polynôme trigonométrique non constant$\}$.
Rappelons que si $f \in P(T^1)$ et $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, alors par 3.2, $f^q - R_p$ a un nombre fini de zéros sur $[0,1]$. Ou encore, sur T^1, $\bar{f}$ a un nombre fini de points périodiques.

6.3.1 Proposition : Pour tout $0 \le r \le \omega$, $P(T^1) \cap F^r$ est dense dans F^r pour la C^r-topologie.

Démonstration : Cela résulte immédiatement de 4.4. ∎

6.3.2 Proposition : Pour tout $0 \le r \le \infty$, l'ensemble des difféomorphismes de F^r qui ont un nombre de rotation rationnel et qui ont un nombre fini de points périodiques (sur T^1) est dense dans F^r pour la C^r-topologie (et est maigre dans la C^r-topologie par 6.2.3).

Démonstration : Il suffit de montrer que $P(T^1) \cap F^r \cap \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est dense dans $P(T^1) \cap F^r$ pour la C^r-topologie par 6.3.1. Or ceci résulte de 5.1 et 5.2. ∎

6.3.3 Soit $D \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ un ensemble dénombrable dense, et posons $F^r_D = \bigcup_{\alpha \in D} F^r_\alpha$. Alors on a la

Proposition : Pour tout $0 \le r \le \omega$, F^r_D est dense dans F^r pour la C^r-topologie.

Démonstration : Il suffit de voir que $P(T^1) \cap F^r_D$ est dense dans $P(T^1) \cap F^r$, par 6.3.1. Or ceci résulte de 5.3.a). ∎

C H A P I T R E I V

INVARIANTS DE C^r CONJUGAISON A DES ROTATIONS

Plan :

1. Invariant H_r, $r \geq 1$.
   1.1 Remarque.
   1.2 L'invariant.
2. Rappels sur la composition.
3. Rappels sur les modules de continuité et sur les fonctions lipschitziennes.
4. Proposition de Gottschalk et Hedlund.
5. Formule définissant l'homéomorphisme qui conjugue un difféomorphisme à une translation.
   5.1 Cas où R_α est translation ergodique de T^n.
   5.2 Cas de T^1.
   5.3 Cas des difféomorphismes périodiques.
6. Théorème de C^r-conjuguaison.
   6.1 Cas de la C^1-conjugaison.
   6.2 Majoration de l'homéomorphisme qui conjugue.
   6.3 Conjugaison C^r plus module de continuité.
   6.4 Conjugaison C^r et l'invariant H_r.
   6.5 Conjugaison C^o plus module de continuité.
   6.6 Condition nécessaire et suffisante de C^1-conjugaison.

Commentaire :

En 1., on introduit l'invariant H_r, $1 \leq r < +\infty$ (qui est semi-continu inférieurement pour la C^r-topologie), et on a alors, si f est C^r-conjugué à une translation, $H_r(f) < +\infty$.
Ce chapitre consiste à montrer la réciproque en 6.4 : $H_r(f) < +\infty$ est équivalent à ce que f soit C^r-conjugué à une translation.

2., 3. et 4. sont des rappels. Il est à noter que si w est un module de continuité, f est un homéomorphisme de classe C^w (par définition) si $f - Id \in C^w$ et $f^{-1} - Id \in C^w$. On ajoute comme toujours f^{-1} dans la définition.

En 5., on écrit l'homéomorphisme qui conjugue f à R_α (translation ergodique sur T^n) comme limite de $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(f^k - i\alpha)$ $(k \in \mathbb{N})$, la convergence ayant lieu dans la C^r-topologie si f est C^r-conjugué à R_α.
Cette formule de l'homéomorphisme qui conjugue f à R_α est extrêment commode pour les modules de continuité, ainsi que nous le montrerons en 6.3 et 6.5.

Le théorème 6.4 est plus subtil. Il résulte de 4.2 que l'on peut résumer ainsi : soit $\varphi \in C^0(T^1)$ et $\psi \in L^\infty(T^1,m)$ (m=mesure de Haar de T^1), et $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, telles que $\varphi = \psi \circ R_\alpha - \psi$, alors ψ est m-presque partout égale à une fonction continue. C'est un théorème de régularité. Il me semble néanmoins que la démonstration de 6.4 reste trop compliquée.

La formule 5. sera utilisée en VIII.2; 6.3 et 6.5 seront utilisés en IX.3 et IX.4.2. La majoration de 6.2 sera utilisée en XI.4.
Pour une formule dans le cas des champs de vecteurs sur T^n analogue à 5., voir T. Saito [1] (d'ailleurs le lecteur n'aura aucun mal à la retrouver).
J. M. Strelcyn a trouvé indépendamment, dans un cas particulier, 6.6.1.

***

1. INVARIANT H_r.

1.1 Remarque : Soit $f \in D^r(T^n)$ avec $r \geq 1$, si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, avec $g \in D^r(T^n)$, $r \geq 1$, alors $t \in \mathbb{R}^n \to D(g^{-1} \circ R_t \circ g)$ est une application $\mathbb{Z}^n$-périodique et continue en t. Elle définit donc une application continue de $T^n \to C^{r-1}(T^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$; $\{D(g^{-1} \circ R_t \circ g) | t \in \mathbb{R}^n\}$ est donc compact dans la C^{r-1}-topologie. D'où la

Proposition : Soit $1 \leq r \leq +\infty$ et $f \in D^r(T^n)$ avec f C^r-conjugué à R_α, alors $\sup_{j \in \mathbb{Z}} |D f^j|_{C^k} < +\infty$ pour tout $k < r$. (Où, si $\varphi \in C^k(T^n)$, $|\varphi|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} |D^i \varphi|_o$ est une norme définissant la C^k-topologie.)

C'est la réciproque que nous nous proposons de démontrer en 6.4.

1.2 L'invariant H_r.
On introduit, pour $1 \leq r < +\infty$, l'invariant

$$H_r : D^r(T^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$f \longrightarrow \sup_{j \in \mathbb{Z}} |D f^j|_{C^{r-1}} .$$

1.2.1 Comme on a, si $p \in \mathbb{Z}^n$, $D(R_p \circ f^j) < D f^j$, on en déduit que H_r passe au quotient et définit $H_r : \mathrm{Diff}_0^r(T^n) \to \overline{\mathbb{R}}$.

1.2.2 Pour $f \in D^r(T^n)$, la propriété $H_r(f) < +\infty$ est invariante par C^r-conjugaison (ce qui se vérifie par un calcul direct en utilisant la formule de Faa-di Bruno).

1.2.3 H_r est une application semi-continue inférieurement pour la C^r-toplogie. En effet H_r est le supremum des fonctions continues $f \to |D f^j|_{C^{r-1}}$, qui sont bien continues puisque $D^r(T^n)$ est un groupe topologique.

1.2.4 Pour $n = 1$, si $H_1(f) = \ell < +\infty$, on a alors pour tout j $1/\ell \leq Df^j \leq \ell$ (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1/\ell \leq Df^j(x) \leq \ell$). En effet on a pour $j \in \mathbb{Z}$

$$Df^j(f^{-j}(x)) = \frac{1}{Df^{-j}(x)} ,$$

d'où le résultat.

2. RAPPELS SUR LA COMPOSITION.

On suppose que $r \geq 1$. Soient f et $g \in C^r(\mathbb{R})$. On a (voir Comtet [1], p. 150, th. C) :

2.1 Proposition (Faa-di Bruno) : On a la formule

$$D^r(f \circ g) = \sum_{1 \leq k \leq r} D^k f \circ g . B_{r,k}(D^1 g, \ldots, D^{r-k+1} g) \quad ,$$

où $B_{r,k}$ sont les polynômes à r-k+1 variables suivant :

$$B_{r,k}(x_1, \ldots, x_{r-k+1}) = \sum \frac{r!}{c_1! c_2! \ldots (1!)^{c_1} (2!)^{c_2}} x_1^{c_1} . x_2^{c_2} \ldots \quad ,$$

la sommation ayant lieu sur tous les entiers $c_1, c_2 \ldots \geq 0$ tels que

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 \ldots = r$$

$$c_1 + c_2 + c_3 \ldots\ldots = k \quad .$$

2.2 Corollaire : Soient f et $g \in D^r(T^1)$, il existe des fonctions continues $\varphi_k^r(x)$ $(1 \leq k \leq r)$, qui sont des polynômes en les dérivées de g telles que si $t \in \mathbb{R}$

$$D^r(f(g(x) + t)) = \sum_{1 \leq k \leq r} D^k f(t + g(x)) . \varphi_k^r(x) \quad ,$$

si on a $|D^1 g|_{C^{r-1}} \leq \ell$, alors il existe une constante C_r ne dépendant que de r, telle que

$$|\varphi_k^r|_0 \leq C_r \ell^r \quad \text{pour } 1 \leq k \leq r \quad .$$

2.3 On a aussi (voir Comtet [1], p. 161, th. D) :

Proposition (Formule d'inversion de Lagrange) : Soit $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R})$, alors on a

$$D^r(f^{-1}) = \sum_{1 \leq k \leq r-1} (-r)_k \, (D^1 f \circ f^{-1})^{-r-k} \, B_{r-1,k}\left(\frac{D^2 f \circ f^{-1}}{2}, \frac{D^3 f \circ f^{-1}}{3}, \ldots \right)$$

où $(x)_k = x(x-1)\ldots(x-k+1)$ (ici, dans $(D^1 f \circ f^{-1})^{-r-k}$, $-r-k$ est une puissance).

On en déduit :

2.4 Corollaire : Si $f \in D^r(T^1)$ avec $|Df|_{C^{r-1}} \leq \ell$ et $|Df^{-1}|_o \leq 1/\ell$, alors il existe une constante universelle B_r telle que

$$|D^r(f^{-1})|_o \leq B_r \, \ell^{3r-2} .$$

2.5 Si $f \in D^r(T^1)$, on posera

$$\|f\|_r = |D f|_{C^{r-1}} + |D f^{-1}|_o .$$

On a la proposition suivante qui résulte immédiatement de 2.4 :

Proposition : Pour tout $1 \leq r < +\infty$, il existe une constante $E_r > 0$ telle que si $f \in D^r(T^1)$ avec $\|f\|_r \leq a$ $(a \geq 1)$, alors $\|f^{-1}\|_r \leq E_r \, a^{3r-2}$.

3. RAPPELS SUR LES MODULES DE CONTINUITE ET SUR LES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES.

Rappelons que $C^o(T^n)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}^n$-périodiques.

3.1 Module de continuité.

Soit $\varphi \in C^o(T^n)$, alors φ a le module de continuité

$w(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)|$. $\delta \to w(\delta)$ est continue, $w(0) = 0$ puisque φ est uniformément continue. On a les propriétés

a) $w(\delta_1 + \delta_2) \leq w(\delta_1) + w(\delta_2)$

b) $w(n\delta) \leq n w(\delta)$ si $n \in \mathbb{N}$

c) $w(a\delta) \leq ([a] + 1) w(\delta)$ si $a \in \mathbb{R}_+$

d) w est monotone non décroissante continue.

Exemple : $w(\delta) = O(\delta^\beta)$, $0 < \beta \leq 1$, alors φ est dans $\mathrm{Lip}_\beta(T^1)$ (i.e., si $0 < \beta < 1$, φ est höldérienne d'exposant β et, si $\beta = 1$, φ est dite lipschitzienne).

Convention : Si $0 < \beta < 1$, on pose $\mathrm{Lip}_\beta(T_1) \equiv C^\beta(T^1) =$ {les fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathbb{Z}^n$-périodiques höldériennes d'exposant β} (i.e.

$\sup_{x\neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{\beta}} < +\infty$ avec, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sup_i |x_i|$).

3.2 Espace $C^w(T^n)$.

Soient $w : [0,1] \to [0,1]$ continue strictement croissante, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, et si $\delta \geq 1$, $w(\delta) = 1$; on suppose que $w(a\delta) \leq ([a] + 1)w(\delta)$ si $a > 0$, $w(n\delta) \leq nw(\delta)$ si $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$C^w(T^n) = \left\{ \varphi \in C^0(T^n) \;\middle|\; |\varphi|_{C^w} = \sup_{x\neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \right\} .$$

On vérifie que $C^w(T^n)$ est une algèbre de Banach pour la norme $|\ |_0 + |\ |_{C^w}$ appelée C^w-topologie. Evidemment $C^w(T^n)$ s'identifie avec les fonctions de T^n dans $\mathbb{R}$ de "module de continuité" w pour la métrique standard sur T^n.

3.3 Proposition : Si $f \in D^0(T^n)$ et si f est lipchitzienne (i.e. il existe $k \geq 1$ tel que pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$), si $\varphi \in C^w(T^n)$, alors

$$\varphi \circ f \in C^w(T^n) .$$

Démonstration : On a

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \leq w(|f(x) - f(y)|) \leq w(k|x - y|) \leq ([k] + 1)w(|x - y|) . \quad \blacksquare$$

3.4 Proposition : Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to [a,b]$, $\varphi \in C^w(T^n)$, et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\psi \in \mathrm{Lip}_1(T^n)$, alors

$$\psi \circ \varphi \in C^w(T^n) .$$

Démonstration : On a $k > 0$ tel que, pour tout x et $y \in [ab]$, $|\psi(x) - \psi(y)| \leq k|x - y|$, donc

$$|\psi \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi(y)| \leq k.w(|x - y|) = k|\varphi|_{C^w} . \quad \blacksquare$$

3.5 Si $\varphi \in C^w(T^n)$ et $\varphi > 0$, alors $1/\varphi \in C^w(T^n)$ (ceci résulte de 3.4).

3.6 Soit $+\infty > r \geq 1$ et w un module de continuité comme en 3.2. On pose $D^{r+w}(T^n) = \{f \in D^r(T^n) \mid D^r f \in C^w(T^n)\}$. Il résulte de 2.1 et 2.3 et de 3.2 à 3.5 que $D^{r+w}(T^1)$ est un groupe.

3.7 Remarques :

- Soit $C^{w+}(T^n) = \{\varphi \in C^w(T^n) \mid |\varphi(x) - \varphi(y)| = O(w|x-y|) \text{ si } |x-y| \to 0\}$.

$C^{w+}(T^n)$ est un sous-espace fermé de $C^w(T^n)$ pour la C^w-topologie.

- Si $D^{r+w+}(T^n) = \{f \in D^r(T^n) \mid D^r f \in C^{w+}(T^n)\}$, $r \geq 1$, alors $D^{r+w+}(T^n)$ est un groupe topologique pour la C^{r+w}-topologie, mais $D^{r+w}(T^n)$ n'est pas un groupe topologique pour la C^{r+w}-topologie.

- $f \in D^0(T^n)$ est un homéomorphisme lipschitzien si par définition f et f^{-1} sont des fonctions lipschitziennes, ce qui est équivalent à ce que l'homéomorphisme induit $\bar{f} : T^1 \to T^1$ soit tel que $\bar{f}$ et $\bar{f}^{-1}$ sont des applications lipschitziennes de T^1 dans T^1 pour la métrique standard.

3.8 Si $0 \leq r < +\infty$ et si $\varphi \in C^r(T^1)$ avec $D^r\varphi \in \mathrm{Lip}_1(T^1)$ et de plus $\varphi > 0$, alors $D^r \mathrm{Log}\, \varphi \in \mathrm{Lip}_1(T^1)$. (Ceci résulte de 2.1 et de 3.2 à 3.5.)

3.9 Soit $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(T^1)$, φ est alors à variation bornée sur tout intervalle compact (et même absolument continue) et donc, par un célèbre théorème de Lebesgue, φ est m-presque partout dérivable (m = dx = mesure de Lebesgue). Si $\ell = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|}$, on a, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où φ est dérivable

$$|D\varphi(x)| \leq \ell$$

et donc $$D\varphi \in L^\infty(T^1, dx) \quad \text{et} \quad |D\varphi|_{L^\infty} = \ell \ .$$

Rappelons que si $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(T^1)$, alors φ est absolument continue sur tout intervalle compact et on a

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x D\varphi(t)dt \ .$$

Le lemme suivant est aussi valable pour les fonctions absolument continues sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

3.10 Lemme : Soit $\varphi \in \mathrm{Lip}_1(T^1)$, si $D\varphi$ est presque partout égale à $g \in C^0(\mathbb{R})$, alors φ est C^1 (i.e. $\varphi \in C^1(T^1)$).

Démonstration : On a

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x D\varphi(t)dt = \varphi(0) + \int_0^x g(t)dt \ ,$$

mais $\int_0^x g(t)dt$ est C^1 puisque g est continue, et donc $\varphi \in C^1(T^1)$. ∎

4. PROPOSITION DE GOTTSCHALK ET HEDLUND.

Rappelons la proposition 14.1 de Gottschalk et Hedlund [1].

4.1 Proposition : Soient X un espace métrique compact et f un homéomorphisme minimal de X (i.e. l'orbite de tout point de X par f est dense dans X). On se donne $h \in C^0(X) = \{$fonctions continues sur X$\}$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe $\varphi \in C^0(X)$ tel que $\varphi \circ f - \varphi = h$;
2) il existe un $x_0 \in X$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{n} h \circ f^i(x_0) \right| < +\infty \quad .$$

Comme nous utiliserons cette proposition, j'inclus une

Démonstration : 1) implique 2) par $\sum_{i=0}^{n-1} h \circ f^i(x_0) = \varphi \circ f^n(x_0) - \varphi(x_0)$.
Montrons que 2) implique 1).
Soit $F : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ défini par $F(x,t) = (f(x), t + h(x))$, F est un homéomorphisme de $X \times \mathbb{R}$, et considérons aussi l'homéomorphisme pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $R_\lambda(x,t) = (x, t+\lambda)$.
On a $F^n(x_0,0) = (f^n(x_0), \sum_{i=0}^{n-1} h \circ f^i(x_0))$. Il résulte de 2) que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{F^n(x_0,0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est compact, et contient donc un ensemble minimal (pour F) M.
Soit $p : X \times \mathbb{R} \to X$ la projection ; alors $p(M) = X$ puisque f est minimal sur X. Nous affirmons que M est un graphe ; en effet, supposons que $(x,\varphi(x)) \in M$, et $(x,\varphi(x)+\lambda) \in M$. De la minimalité de M on déduit que $R_\lambda(M) = M$ (puisque $R_\lambda \circ F = F \circ R_\lambda$), donc pour $n \in \mathbb{N}$, $R_{n\lambda}(M) = M$. Mais puisque M est compact, λ est nécessairement nul. La fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dont M est le graphe est continue (puisque son graphe est compact) et on voit facilement que $\varphi \circ f - \varphi = h$. ∎

4.2 Proposition : Soient X un espace métrique compact, f un homéomorphisme minimal de X, et μ une mesure de probabilité sur X, invariante par f et pour laquelle f est ergodique.
On se donne $h \in C^0(X)$, et on suppose qu'il existe une fonction $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$

telle que μ presque partout l'on ait

(1) $$h = \varphi \circ f - \varphi \quad .$$

Alors φ est μ presque partout égale à une fonction continue.

Démonstration : Soit φ une fonction définie partout. Soit A l'ensemble de μ mesure nulle, réunion de l'ensemble où (1) n'est pas vraie, et du complémentaire du support essentiel de φ. Soit $B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(A)$. B est de μ mesure nulle, soit donc $x_o \in X - B$; on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^n(x_o) \in X - B$, et de plus on a

$$|h(x_o) + \ldots + h \circ f^n(x_o)| = |\varphi \circ f^{n+1}(x_o) - \varphi(x_o)| \leq 2|\varphi|_{L^\infty} .$$

Donc, d'après la proposition précédente, il existe $\varphi_1 \in C^o(X)$ tel que

$$h = \varphi_1 \circ f - \varphi_1 \quad ,$$

donc pour μ-presque partout on a

$$(\varphi_1 - \varphi) \circ f = \varphi_1 - \varphi \quad .$$

Comme f est μ-ergodique :

$$\varphi - \varphi_1 = C = \text{constante } \mu\text{-presque partout,}$$

donc φ est égale μ-presque partout à $\varphi_1 + C \in C^o(X)$. ∎

Exemple : Si R_α est une translation ergodique de T^n muni de la mesure de Haar, R_α est alors minimal (et strictement ergodique), donc satisfait aux hypothèses de 4.2.

5. FORMULE DEFINISSANT L'HOMEOMORPHISME QUI CONJUGUE UN DIFFEOMORPHISME A UNE TRANSLATION.

Soit $f \in D^r(T^n)$, nous considérons que f est C^r-conjugué à R_α, soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^r(T^n)$.

5.1 Cas où R_α est une translation ergodique sur T^n.

Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$, le difféomorphisme induit par f sur T^n, $\mu = g_*^{-1} m$ (m = mesure de Haar). Si $g = Id + \psi$, $\psi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, on peut supposer, quitte à composer g par une translation, que $\int_{T^n} \psi \, d\mu = 0$. Si $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, posons

$$S_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha) \quad .$$

On a $S_k(f) = Id + \psi_k$, avec $\psi_k \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$.

5.1.1 Remarque : Si $n = 1$, si $f \in D^r(T^1)$, alors $S_k(f) \in D^r(T^1)$.
En effet, si $r = 0$, $S_k(f)$ est strictement monotone, donc $S_k(f) \in D^0(T^1)$, et si $r \geq 1$, $D(S_k(f)) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} Df^i \right) > 0$, et donc $S_k(f) \in D^r(T^1)$.

On a la proposition (voir T. Saito [1] pour le cas des champs de vecteurs) :

5.1.2 Proposition : Si $0 \leq r \leq +\infty$, si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^r(T^n)$, $g = Id + \psi$, $\int_{T^n} \psi d\mu = 0$, alors, si $k \to +\infty$, $S_k(f) - g$ converge dans la C^r-topologie vers 0.

Démonstration : Puisque $g \circ f^n = R_{n\alpha} \circ g$ si $n \in \mathbb{N}$, et $g = Id + \psi$, on a

$$f^n - Id - n\alpha = \psi - \psi \circ f^n \quad ,$$

soit

$$S_k(f) - Id = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\psi - \psi \circ f^i) = \psi - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi \circ f^i \quad .$$

Soit

$$S_k(f) - Id - \psi \equiv S_k(f) - g = -\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi \circ f^i \quad .$$

La proposition résulte du lemme suivant :

5.1.3 Lemme : Soient $0 \leq r \leq +\infty$ et $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^r(T^n)$ et R_α translation ergodique sur T^n, et μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$, alors pour tout $\varphi \in C^r(T^n)$, si $k \to +\infty$, $\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} \varphi \circ f^i$ converge dans la C^r-topologie vers $\int_{T^n} \varphi \, d\mu$.

Démonstration : On écrit

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\varphi\circ f^i = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\varphi\circ g^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g \quad .$$

Comme l'application $\psi\in C^r(T^n)\to\psi\circ g^{-1}\in C^r(T^n)$ est linéaire continue (si $g\in D^r(T^1)$), il faut et il suffit de voir que, si $k\to+\infty$, $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(\varphi\circ g^{-1})\circ R_{i\alpha}$ converge vers $\int_{T^n}\varphi\circ g^{-1}(x)dx = \int_{T^n}\varphi\,d\mu$ (puisque $g_*\mu = dx \equiv$ mesure de Haar de T^n). Pour $r=0$, ceci résulte de la stricte etgodicité de R_α , et si $r\geq 1$, on applique encore la stricte ergodicité de R_α aux dérivées des sommes de Birkhoff. ∎

5.2 Cas de T^1.

On suppose que $f\in D^0(T^1)$ et $\rho(f) = \alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

On peut supposer que f n'est pas C^0-conjugué à R_α. Il existe par II.7.1 $g = Id+\psi$ avec $\psi\in C^0(T^1)$, et g monotone non décroissante, avec $g\circ f = R_\alpha\circ g$. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar f$ (unique par II.8.2). On peut supposer que $\int_{T^1}\psi\,d\mu = 0$.

Proposition : Si $k\to+\infty$, $S_k(f)-g$ converge uniformément vers 0.

Démonstration : On a de façon analogue qu'en 4.1.2 :

$$S_k(f)-g = -\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\psi\circ f^i \quad .$$

Par l'unique ergodicité de f (II.8.1.2), si $k\to+\infty$, $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\psi\circ f^i$ converge uniformément vers $\int_{T^1}\psi\,d\mu = 0$. ∎

5.3 Cas des difféomorphismes périodiques.

Soit $f\in D^r(T^n)$ tel qu'il existe $q\in\mathbb{N}$, avec $f^q = R_p$, $p\in\mathbb{Z}^n$ (sur T^n, $\bar f$ est périodique). Posons

$$S_q(f) = g = \sum_{i=0}^{q-1}\frac{f^i - i\alpha}{q} \quad ,$$

avec $\alpha = p/q$, $g = Id+\varphi$ avec $\varphi\in C^r(T^n,\mathbb{R}^n)$. En général, g n'est pas un difféomorphisme de T^n. On a alors la

5.3.1 Proposition : On a $g\circ f = R_{p/q}\circ g$.

Démonstration : En effet, on a

$$g \circ f = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{(f^i - i\alpha) \circ f}{q} = \frac{p}{q} + g \quad \text{puisque } f^q = R_p \quad . \quad \blacksquare$$

En particularisant à T^1 on a le

5.3.2 Corollaire : Pour tout $0 \le r \le \omega$, si $f \in D^r(T^1)$, $\rho(f) = p/q$ et $f^q = R_p$, alors f est C^r-conjugué à $R_{p/q}$ (i.e. $f \in O^r_{p/q}$).

Démonstration : On voit que g est strictement croissante, et, si $r \ge 1$,

$$Dg = \sum_i \frac{Df^i}{q} > 0 \quad .$$

Comme $g \circ f = R_{p/q} \circ g$, on a bien $f = g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g$, avec $g \in D^r(T^1)$. On a donc, pour tout $0 \le r \le \omega$,

$$O^o_{p/q} \cap D^r(T^1) = O^r_{p/q} \quad . \quad \blacksquare$$

6. THEOREMES DE C^r-CONJUGAISON.

6.1 Cas de la C^1-conjugaison.

On a le

6.1.1 Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in D^1(T^1)$ soit C^1-conjugué à R_α avec $\alpha = \rho(f)$, est que $H_1(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |D f^n|_o < +\infty$.

Démonstration : La condition est nécessaire par 1.1. Nous allons voir qu'elle est suffisante.

Puisque $\{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue par II.9, f est C^o-conjugué à R_α.

Cas $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$. Puisque f est C^o-conjugué à $R_{p/q}$ (i.e. $f^q = R_p$), par 5.3.2 f est C^1-conjugué à R_α.

Cas $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Par 1.2.4, si $H_1(f) = \ell$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/\ell \le Df^n \le \ell$. Il résulte que $\sup_n |\operatorname{Log} Df^n|_o < +\infty$.

Or $\operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Log} Df \circ f^i$. Puisque $\bar{f}$ est C^o-conjugué à R_α, $\bar{f}$ est un homéomorphisme minimal de T^1. Par la proposition de Gottschalk et Hedlund, 4.1, il existe $\psi \in C^o(T^1)$ tel que

$$\operatorname{Log} Df = \psi - \psi \circ f \quad .$$

Si ψ est une solution, $\psi + c$ ($c \in \mathbb{R}$) est aussi une solution. Choisissons c tel que

$$\int_0^1 e^{\psi(x)+c}\, dx = 1 \quad .$$

Posons $h(x) = \int_0^x e^{\psi(x)+c}\, dx$, alors $h \in D^1(T^1)$. On a $Dh \circ f \cdot Df = Dh$.
Soit $h \circ f = R_\alpha \circ h$ avec $\alpha = \rho(f)$. f est donc bien C^1-conjugué à R_α. ∎

6.1.2 Remarque : Supposons que $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ et que $f^q \neq R_p$, alors $\lim_{n\to+\infty} |D f^n|_o = +\infty$.

En effet, soit $f_1 = f^q - p$. f_1 a sur $\mathbb{R}$ des points fixes. On a

$$|D f_1^k|_o = |D f^{kq}|_o \qquad \text{si } k \in \mathbb{N} \quad .$$

On va montrer d'abord que $\lim_{k\to+\infty} |D f_1^k|_o = +\infty$. Puisque $f_1 \neq Id$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ tels que $f_1(x) - x \neq 0$ si $x \in]a,b[$ et $f_1(a) - a = f_1(b) - b = 0$ ($f_1 - Id$ s'annule par II.2.4).
Supposons que $f_1 - Id > 0$ sur $]a,b[$ (si $f - Id < 0$, on aurait un raisonnement analogue en échangeant a et b). Soit $A > 0$ donné, et $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ tel que $\frac{b-a}{2(c-a)} \geq A$. On détermine k_o tel que

$$f_1^{k_o}(c) \geq \frac{b+a}{2} \quad ,$$

si $k \geq k_o$, on a aussi $f_1^k(c) \geq \frac{b+a}{2}$. Donc par la formule de la moyenne, on a, pour $k \geq k_o$, $|D f_1^k| \geq A$. Comme A est arbitraire, $\lim_{k\to+\infty} |D f_1^k| = +\infty$.
Si $n \in \mathbb{N}$, divisons n par q, $n = kq + r$, avec $k, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < q$. On a donc

$$Df^n = Df^{kq} \circ f^r \cdot Df^r \quad .$$

Comme $0 \leq r < q$, et que $f \in D^1(T^1)$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} |D f^n|_o = +\infty$.

6.1.3 Remarque : Soit $f \in D^1(T^1)$ avec $\sup_{n\in\mathbb{N}} |D f^n|_o < +\infty$, alors $H_1(f) < +\infty$.
Il faut montrer que $\operatorname{Inf}_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{Min}_{x\in\mathbb{R}} D f^n(x)) > 0$. On peut supposer que f est C^o-conjugué à R_α par II.9 et que $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Soit $\bar{f}$ le difféomorphisme induit par f sur T^1. L'adhérence de $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \operatorname{Diff}_+^o(T^1)$, G, est un groupe compact puisque $\bar{f}$ est C^o-conjugué à R_α et que $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans G. Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors $\bar{f}^k$ est limite

d'une suite $\bar{f}^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \to +\infty$ dans la C^0-topologie.
Mais puisque $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} |D^1 f^n|_0 < +\infty$, $\bar{f}^n$ est une application lipschitzienne de T^1 dans T^1 (pour la métrique $\| \ \|$ sur T^1) de rapport $\leq 2\ell$. $\bar{f}^k$, comme limite uniforme de $\bar{f}^{n_i}$, est donc lipschitzienne, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{f}^{-n}$ est lipschitzienne de rapport 2ℓ, d'où il résulte que $\inf_{n\in\mathbb{N}} (\min_{x\in\mathbb{R}} Df^n(x)) > 0$.
On montrerait de façon analogue que $\inf_{n\in\mathbb{N}} (\min_{x\in\mathbb{R}} Df^n(x)) > 0$ implique $H_1(f) < +\infty$.

6.2 Majoration de l'homéomorphisme qui conjugue.

Proposition : *Soit* $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ *avec* $g \in D^r(T^1)$ *et* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $+\infty < r \geq 1$. *Alors* :

$$|Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0 \leq (r+1)\ell$$

avec $\ell = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |D\ f|_{C^{r-1}} = H_r(f) < +\infty$.

(On pose $\|g\|_r = |Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0$.)

Démonstration : Par 5.1.2, si $k \to +\infty$, $S_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} (f^i - i\alpha)$ converge dans la C^r-topologie vers $g + c$ avec, si $g = Id + \psi$, $c = -\int_T \psi d\mu$, où μ est l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. On a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\ell} \leq Df^i \leq \ell$$

et, si $1 \leq j \leq r$,

$$|D^j f^i|_0 \leq \ell \ ;$$

donc,

$$\frac{1}{\ell} \leq D\ S_k(f) \leq \ell$$

et, si $1 \leq j \leq r$,

$$|D^j S_k(f)|_0 \leq \ell \ .$$

Il résulte par passage à la limite que

$$\frac{1}{\ell} \leq Dg \leq \ell$$

et, si $1 \leq j \leq r$,

$$|D^j g|_0 \leq \ell \ .$$

Soit

$$\|g\|_r = |Dg|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_0 \leq (r+1)\ell \ . \ \blacksquare$$

6.3 Conjugaison C^r plus module de continuité.

Soit w un module de continuité comme en 3.2 et $r \geq 1$ et $D^{r+w}(T^1)$ les difféomorphismes C^r tels que la dérivée r-ième soit de module de continuité $\leq w$ (dans $C^w(T^1)$), si $\varphi \in C^w(T^1)$, soit la semi-norme

$$|\varphi|_{C^w} = \sup_{\substack{x \neq y \\ |x-y| \leq 1}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty \quad .$$

Soit $H_{r+w} : D^{r+w}(T^1) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$f \longrightarrow H_r(f) + \sup_{n \in \mathbb{N}} |D^r f^n|_{C^w} \quad .$$

Remarque : $H_{r+w} : D^{r+1}(T^1) \to \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement dans la C^{r+1}-topologie.

6.3.1 Proposition : Soit $+\infty > r \geq 1$ et $f \in D^{r+w}(T^1)$, avec f C^r-conjugué à R_α, alors une condition nécessaire et suffisante pour que f soit C^{r+w}-conjugué à R_α est que $H_{r+w}(f) < +\infty$ (i.e. $\sup_{n \in \mathbb{N}} |D^r f^n|_{C^w} < +\infty$).

Démonstration : La condition est nécessaire et résulte de 2.1, 2.3 et de 3.4.
Si $\rho(f) = p/q$, ceci résulte de 5.3.
Si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Soit $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, avec $h \in D^r(T^1)$. Puisque $\ell = H_{r+w}(f) < +\infty$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour x et $y \in \mathbb{R}$, $|D^r f^n(x) - D^r f^n(y)| \leq \ell w(|x-y|)$,

donc : $$|D^r S_k(f)(x) - D^r S_k(f)(y)| \leq \ell w(|x-y|) \ ,$$

avec $S_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha)$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.
Or, si $k \to +\infty$, $D^r S_k(f)$ converge dans la C^0-topologie vers $D^r h$ par 5.1.2.
Par passage à la limite simple, on a

$$|D^r h(x) - D^r h(y)| \leq \ell w(|x-y|) \quad .$$

Donc $D^r h \in C^w(T^1)$, on a bien $h \in D^{r+w}(T^1)$ (et aussi $h^{-1} \in D^{r+w}(T^1)$ par 3.6). ■

6.3.2 Corollaire : Soit $f \in D^r(T^1)$, $r \geq 1$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ avec $H_r(f) < +\infty$, on suppose que $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, $h \in D^{r-1}(T^1)$, alors $D^{r-1}h$ est lipschitzienne (i.e. dans $\mathrm{Lip}_1(T^1)$) (ce qui implique $D^{r-1}h^{-1} \in \mathrm{Lip}_1(T^1)$ par 3.6).

Remarque : Si $r \geq 2$, $f \in \mathrm{Diff}^r_+(T^1)$ et $H_r(f) < +\infty$, alors on voit facilement que f est C^{r-1}-conjugué à une rotation. En effet, $\mathbb{Z}_f = \{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est borné dans la C^r-topologie, donc l'adhérence de $\mathbb{Z}_f$ dans la C^{r-1}-topologie G_f^{r-1} est compacte par la C^{r-1}-topologie, et la remarque résulte du

Lemme : Si $1 \leq r \leq +\infty$, soit f tel que $\mathbb{Z}_f \subset G$ un groupe compact dans $\mathrm{Diff}^r_+(T^1)$, alors f est C^r-conjugué à R_α avec $\alpha = \rho(f)$.

Démonstration : Soit dx la forme volume standard sur T^1, en moyennant dx par rapport à la mesure de Haar $\mu(\gamma)$ sur G, on a

$$\int_G (\gamma^* dx)\mu(\gamma) = \omega \quad ,$$

ω est une 1-forme volume de classe C^{r-1} ($\omega > 0$ et $\int_{T^1} \omega = 1$), et on a, pour tout $\gamma \in G$,

$$\gamma^* \omega = \omega \quad .$$

Ecrivons $\omega = \psi(x)dx$ avec $\psi \in C^{r-1}(T^1)$, $\psi > 0$, et soit $\tilde{f}$ un relèvement de f à $D^r(T)$. On a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\tilde{f}(y)}^{\tilde{f}(x)} \psi(x)dx = \int_x^y \psi(x)dx \quad .$$

Posons $g(x) = \int_0^x \psi(x)dx$. On a $g \in D^r(T^1)$ puisque $\psi \in C^{r-1}(T^1)$, $\psi > 0$, et $\int_0^1 \psi(x)dx = 1$, de plus on a aussi

$$(g \circ \tilde{f})(x) - (g \circ \tilde{f})(0) = g(x) - g(0) \quad .$$

Soit $g \circ \tilde{f} = R_\alpha \circ g$, avec $\rho(f) = \alpha$ par II.2.10. Donc $\tilde{f}$ est C^r-conjugué à R_α. ∎

6.3.3 Rappelons que si $0 < \beta < 1$, $C^\beta(T^1) = \mathrm{Lip}_\beta(T^1)$. On pose, si $\varphi \in C^\beta(T^1)$,

$$|\varphi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\beta} \quad .$$

Corollaire : Soit $0 < \beta < 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in D^{1+\beta}(T^1)$ soit $C^{1+\beta}$-conjugué à une translation est que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathrm{Log}\ Df^n|_\beta < +\infty \quad .$$

Démonstration : Il suffit de voir que l'on a $k = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\text{Log } Df^n|_0 < +\infty$ car alors on applique 6.1.1 et la proposition 6.3.1 (puisque $x \to e^x$ est lipschitzienne sur $[-k,k]$, on applique 3.4 et on a bien $\sup_n |Df^n|_\beta < +\infty$) ; or ceci résulte de ce que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Log } Df^n$ s'annule. ■

6.4 Conjugaison C^r et l'invariant H_r.

On a le

Théorème : Soit $1 \le r \le +\infty$ et $f \in D^r(T^1)$, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit C^r-conjugué à une translation est que si $r < +\infty$, $H_r(f) < +\infty$, et si $r = +\infty$, pour tout k, $H_k(f) < +\infty$.

Démonstration :

a) Cas $\rho(f) = \alpha = p/q$. Si $H_r(f) < +\infty$, alors $H_1(f) < +\infty$ par 6.1.1. f est C^0-conjugué à $R_{p/q}$, et donc par 5.3 f est C^r-conjugué à $R_{p/q}$.

b) Cas $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $r < +\infty$. Nous allons raisonner par récurrence. Si $r = 1$, par 6.1.1, f est C^1-conjugué à R_α. Montrons que si c'est vrai pour r, alors c'est vrai pour r+1.

Si $f \in D^{r+1}(T^1)$ et $H_{r+1}(f) < +\infty$, comme $H_{r+1}(f) < +\infty$ implique $H_r(f) < +\infty$ par récurrence, f est C^r-conjugué à R_α, soit $f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$, avec $g \in D^r(T^1, 0)$. Par 6.3.2, $D^r g \in \text{Lip}_1(T^1)$. Il suit que $D^r g$ est m-presque partout dérivable et $D^{r+1} g \in L^\infty(T^1, dx)$.

Montrons que $D^r g$ est en fait C^1.

On a

$$f \circ g = g \circ R_\alpha$$

soit, puisque $r \ge 2$,

$$Df \circ g . Dg = Dg \circ R_\alpha$$

$$\text{Log } Df \circ g = \text{Log } Dg \circ R_\alpha - \text{Log } Dg \quad .$$

Il suit de 3.8 que $D^{r-1} \text{Log } Dg$ est lipschitzien. On a, puisque g est C^r,

$$D^{r-1} \text{Log } Df \circ g = D^{r-1} \text{Log } Dg \circ R_\alpha - D^{r-1} \text{Log } Dg \quad .$$

Comme $D^{r-1} \text{Log } Dg$ est lipschitzien, il est m presque partout dérivable et $D^r \text{Log } Dg \in L^\infty(T^1, m)$ (par 3.9). On a m presque partout

$$D^r \text{Log } Df \circ g = (D^r \text{Log } Dg) \circ R_\alpha - D^r \text{Log } Dg \quad .$$

On applique 4.2 (avec $X = T^1$ et $f = R_\alpha$). On a bien $D^r \operatorname{Log} Df \circ g \in C^o(T^1)$ puisque $f \in D^{r+1}(T^1)$ et $g \in D^r(T^1)$, et $D^r \operatorname{Log} Dg \in L^\infty(T^1, dx)$, donc $D^r \operatorname{Log} Dg^{-1}$ est m presque partout égale à une fonction continue, et comme $D^{r-1} \operatorname{Log} Dg$ est une fonction lipschitzienne, par le lemme 3.10,

$$D^{r-1} \operatorname{Log} Dg \in C^1(T^1) \quad ,$$

et il suit que $g \in D^{r+1}(T^1)$, et donc f est C^{r+1}-conjugué à R_α, et donc ceci achève la récurrence.

c) $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $r = +\infty$. Alors f est C^r-conjugué par un unique $g \in D^r(T^1, 0)$ pour tout r (puisque $H_r(f) < +\infty$ pour tout r fini), f est donc C^∞-conjugué à R_α. ∎

6.5 Conjugaison C^o plus module de continuité.

On convient dans la suite que $w : [0,1] \to [0,1]$ est continue strictement croissante, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, si $\delta \geq 1$, $w(\delta) = 1$, et si $a > 0$, $w(a\delta) \leq ([a]+1)w(\delta)$, $w(n\delta) \leq n w(\delta)$ si $n \in \mathbb{N}$.

6.5.1 Définition : f est un homéomorphisme de classe C^w si $f - Id \in C^w$ et $f^{-1} - Id \in C^w$.

Si $w(t) = t^\beta$, $0 < \beta < 1$, on dira plus simplement que f est un homéomorphisme de classe C^β. Si $w(t) = t$, on dira que f est un homéomorphisme lipschitzien.

6.5.2 Proposition : Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1) f est un homéomorphisme de classe C^w ;

2) il existe $C > 1$ tel que l'on ait, pour $|x - y| \leq 1$,

$$w^{-1}\left(\frac{1}{C}\,|x-y|\right) \leq |f(x) - f(y)| \leq C w(|x-y|) \quad .$$

Démonstration : 1) implique 2) avec $C = \sup(1 + |\varphi|_w, 1 + |\varphi_{-1}|_w)$ et $f = Id + \varphi$ et $f^{-1} = Id + \varphi_{-1}$.

2) implique 1) puisque $|f(x) - f(y)| \leq C w(|x-y|)$ entraîne $f - Id \in C^w(T^1)$, et $w^{-1}(\frac{1}{C}\,|x-y|) \leq |f(x) - f(y)|$ entraîne, en posant $x = f^{-1}(z)$ et $y = f^{-1}(t)$ que $f^{-1} - Id \in C^w(T^1)$. ∎

6.5.3 Remarque : Si f et g sont des homéomorphismes de classe C^w, alors $f \circ g$ est de classe C^{w^2} ($w^2 = w \circ w$).

6.5.4 Si $f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$, avec g de classe C^w, alors on a $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |f^n - Id - n\rho(f)|_{C^{w^2}} < +\infty$.

6.5.5 Si f est C^1 et si w est un module de continuité, alors $f \in D^1(T^1) \longrightarrow H_{w^2}(f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f^n - Id - n\rho(f)|_{C^{w^2}} \in \bar{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement dans la C^1-topologie.

On a le théorème :

6.5.6 Théorème : Soit f un homéomorphisme lipschitzien et w un module de continuité. Si $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |f^n - Id - n\rho(f)|_{C^w} < +\infty$, alors f est C^o-conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f)$) par un homéomorphisme de classe C^w.

Démonstration : Puisque $\{f^n\}$ est équicontinue, f est C^o-conjugué à R_α. Soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^o(T^1)$. Or si $k \to +\infty$, $S_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (f^i - i\alpha)$ converge dans la C^o-topologie vers g + constante par 5.1.2.
Puisque $\ell = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f^n - Id - n\alpha|_{C^w} < +\infty$, on suppose que $\ell \geq 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout x et y, $0 \leq x - y \leq 1$, $w^{-1}(\frac{1}{\ell}(x-y)) \leq f^n(x) - f^n(y) \leq \ell\, w(x-y)$.
Donc :

$$w^{-1}(\tfrac{1}{\ell}(x-y)) \leq S_k(f)(x) - S_k(f)(y) \leq \ell\, w(x-y) \quad ,$$

et par passage à la limite :

$$w^{-1}(\tfrac{1}{\ell}(x-y)) \leq g(x) - g(y) \leq \ell\, w(x-y) \quad .$$

Soit : g est un homéomorphisme de classe C^w par 6.5.2. ∎

6.5.7 Remarque : Par le même raisonnement que 6.1.3, f est un homéomorphisme lipschitzien, et si w est un module de continuité, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f^n - Id - n\rho(f)|_{C^w} < +\infty$ implique que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |f^n - Id - n\rho(f)|_{C^w} < +\infty$.

6.5.8 Critère de C^β-conjugaison ($0 < \beta < 1$).
Soit f un homéomorphisme lipschitzien. Si, pour $0 < \beta < 1$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f^n - Id - n\rho(f)|_\beta < +\infty$, alors f est conjugué à R_α ($\alpha = (f)$) par un homéomorphisme de classe C^β.

Démonstration : Par la remarque 6.5.7, on a $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |f^n - Id - n\alpha|_\beta < +\infty$, et alors on applique le théorème 6.5.6. ■

6.5.9 Proposition : Soit f un homéomorphisme lipschitzien. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f)$) par un homéomorphisme lipschitzien est que $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{Log}\ Df^n|_{L^\infty(T^1,m)} < +\infty$.

Démonstration : On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout x et $y\in\mathbb{R}$,

$$e^{-\ell}|x-y| \le |f^n(x) - f^n(y)| \le e^{\ell}|x-y| \quad ,$$

et on raisonne comme dans la démonstration de 6.5.6. ■

6.6 Condition nécessaire et suffisante de C^1 conjugaison.

6.6.1 Remarque : Si $f\in D^1(T^1)$ est C^1-conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f)$), alors on a

$$\lim_{n\alpha\to 0} |Df^n - 1|_o = 0$$

(i.e. pour toute suite n_i telle que $n_i\alpha \to 0 \pmod 1$ on a $\lim_{n_i\to+\infty} |Df^{n_i} - 1|_o = 0$). En effet on a $f^n = h^{-1}\circ R_{n\alpha} h$ si $n\alpha\to 0$, $\bar f^n \to Id$ dans la C^1-topologie.

6.2.2 Soit $\alpha\in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Posons, si $\varphi\in C^o(T^1)$, $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi\circ R_\alpha$.
La proposition suivante est due essentiellement à Veech [1, p. 9] :

Proposition : Soit $\varphi\in C^o(T^1)$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\psi\in C^o(T^1)$ vérifiant

$$\psi - \psi\circ R_\alpha = \varphi$$

est que

$$\lim_{n\alpha\to 0} |\varphi_n|_o = 0 \quad .$$

Démonstration : La condition est nécessaire et résulte immédiatement de $\psi - \psi\circ R_{n\alpha} = \varphi_n$.
Montrons que la condition est suffisante. Considérons l'application $\{n\alpha\}\to C^o(T^1)$ définie par

$$h(n\alpha,.) = \varphi_n(.) \quad .$$

On a la relation

$$h((m+n)\alpha,x) = h(m\alpha,x+n\alpha) + h(n\alpha,x) \quad . \tag{1}$$

On voit facilement que $\{n\alpha\} \to C^0(T^1)$ est uniformément continue et donc s'étend en une application continue $T^1 \ni y \to h(y) \in C^0(T^1)$. La relation (1) devient

$$h(y+w,x) = h(y,x+w) + h(w,x) \quad .$$

On pose $y = \alpha$, $x = 0$ et $\psi(w) = h(w,0)$. On a

$$\psi(\alpha+w) - \psi(w) = \varphi(w) \quad . \quad \blacksquare$$

6.6.3 Proposition : Soit $f \in D^1(T^1)$, $\alpha = \rho(f)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit C^1-conjugué à R_α est que

$$\lim_{n\alpha \to 0} |Df^n - 1|_0 = 0 \quad .$$

Démonstration : La condition est nécessaire par 6.6.1.
Montrons qu'elle est suffisante. Par II.9, f est C^0-conjugué à R_α.
Si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, alors la proposition résulte de 5.3. Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on a $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec $h \in D^0(T^1)$. De l'hypothèse il résulte que $\lim_{n\alpha \to 0} |(\text{Log } Df \circ h^{-1})_n|_0 = 0$, et donc par la proposition précédente, il existe $\psi_1 \in C^0(T^1)$ tel que $\psi_1 - \psi_1 \circ R_\alpha = \text{Log } Df \circ h^{-1}$. En posant $\psi = \psi_1 \circ h^{-1}$, on conclut que $\psi - \psi \circ f = \text{Log } Df$ et on raisonne alors comme en 6.1. $\blacksquare$

C H A P I T R E V

RAPPELS D'ARITHMETIQUE

Plan :

1. Notations
2. Principe de Dirichlet
3. Condition diophantienne
4. Mesure
5. Nombres de Liouville
6. Cas de T^1
7. Fractions continues
8. Fractions continues et mesure
9. Nombres de densité bornée
10. Catégorie et nombre de rotation

Commentaire :

Ce chapitre est constitué essentiellement de rappels. Pour des démonstrations, nous renvoyons le lecteur à Cassels [1], Khintchine [1] et Lang [1]. D'ailleurs le lecteur peut prendre ce chapitre comme une suite d'exercices. Le paragraphe 10 "catégorie et nombre de rotation" montre que quand on fera au chapitre XII des raisonnements par catégorie de Baire, génériquement dans $F^\infty = D^\infty(T^1) - \mathrm{Int}\,\rho^{-1}(\mathbb{Q})$, on obtiendra des nombres de rotations qui sont des nombres de Liouville et on ne pourra absolument rien conclure sur la mesure de Lebesgue des nombres de rotations ainsi construits. Il se produit la dualité souvent rencontrée en analyse harmonique entre les ensembles résiduels et les ensembles de mesure de Lebesgue pleine.

1. NOTATIONS

Soit si $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\langle k,\alpha\rangle = \sum_i k_i\alpha_i$$

On pose $|k| = \sup_i |k_i|$ et si $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \operatorname{Inf}_p |x * p|$; $\|x\|$ définit une métrique sur T^1.

2. PRINCIPE DE DIRICHLET

Soit $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, tel que $\{1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ soient indépendants sur $\mathbb{Q}$ (soit encore, tel que R_α sur T^n est une translation ergodique).

Alors l'inéquation

$$\|\langle k,\alpha\rangle\| < \frac{1}{|k|^n}$$

a une infinité de solutions $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$:
il existe une suite $k_i \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ avec: si $i \to +\infty$, $|k_i| \to +\infty$, et vérifiant

$$\|\langle k_i,\alpha\rangle\| < \frac{1}{|k_i|^n}$$

3. CONDITION DIOPHANTIENNE

3.1 Définition : $\alpha \in \mathbb{R}^n$ satisfait une condition diophantienne, s'il existe $\beta \geq 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, on ait

$$\|\langle k,\alpha\rangle\| \geq \frac{C}{|k|^{n+\beta}}$$

3.2 $\alpha \in T^n$ satisfait une condition diophantienne si un relèvement de α à $\mathbb{R}^n$ satisfait une condition diophantienne (cela ne dépend pas du relèvement).

3.3 Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ $\varphi > 0$, φ monotone non décroissante, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est de type φ si l'inéquation

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| < \frac{1}{|k|^n \varphi(|k|)}$$

a seulement un nombre fini de solutions. Ce qui est équivalent à ce qu'il existe $C > 0$, tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ on ait

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq \frac{C}{|k|^n \varphi(|k|)} .$$

3.4 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est de type constant si α est de type φ avec une constante > 0.

3.5 Remarques :

- Si α est de type φ alors R_α sur T^n est une translation ergodique.
- α satisfait une condition diophantienne si α est de type $\varphi(t) = t^\beta$, $\beta \geq 0$. En particulier tout nombre de type constant satisfait une condition diophantienne.
- Si α satisfait une condition diophantienne, l'inf. des β pour lesquelles on a la définition 3.1 n'est pas en général atteint (voir 4.2 à 4.4).
- Nous avons choisi $n + \beta$ dans la définition 3.1 par le principe des tiroirs de Dirichlet.

3.6 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ n'est pas de type constant, s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ tel que

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| < \frac{1}{|k|^n \varphi(|k|)}$$

a une infinité de solutions (en effet α est de type constant si $\operatorname{Inf}_{|k| \neq 0} |k|^n \|\langle k, \alpha \rangle\| > 0$).

4. MESURE

4.1 L'ensemble des $\alpha \in T^n$ qui sont de type t^ε $\varepsilon > 0$ est de mesure de Haar 1.

4.2 L'ensemble des $\alpha \in T^n$ qui sont de type constant est de mesure de Haar nulle.

4.3 Définition : $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est de type Roth, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ $\|<k,\alpha>\| \geq \frac{C_\varepsilon}{|k|^{n+\varepsilon}}$.

4.4 Par intersection dénombrable de la propriété 4.1, les nombres de type Roth sont de mesure de Lebesgue pleine.

5. NOMBRES DE LIOUVILLE

5.1 Définition : $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est de Liouville, si R_α sur T^n est une translation ergodique et si α ne satisfait pas une condition diophantienne soit encore pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $k_i \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, tel que

$$\|<k_i,\alpha>\| < 1/|k_i|^i \quad \text{et} \quad |k_i| \geq 2.$$

5.2 Soit R: les $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que R_α ne sont pas une translation ergodique sur T^n, ou encore les $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $\pi(\alpha) \in T^n$ satisfait une relation linéaire dans le $\mathbb{Z}$ module T^n.

5.3 Proposition : R est maigre (c'est même un F_σ) .

Démonstration : R est une réunion dénombrable des hyperplans $k_o + <k,x> = 0$ avec $k_o \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$. ∎

5.4 Proposition : Les nombres de Liouville de $\mathbb{R}^n$ sont résiduels (c'est un G_δ dense).

Démonstration : Soit $U_i = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \|\langle k, \alpha \rangle\| < \frac{1}{|k|^i}\}$

U_i est un ouvert, dense puisqu'il contient $\mathbb{Q}^n$. Les nombres de Liouville sont $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i) - R$. ∎

$\mathbb{R}^n$ est donc l'union disjointe de R qui est maigre et mesure nulle, des nombres de Liouville qui sont résiduels et de mesure nulle, et, des nombres qui satisfont une condition diophantienne qui sont de mesure de Lebesgue pleine et maigre.

6. CAS DE T^1

Comme c'est sous la forme classique que nous l'utiliserons, nous allons rapidement réécrire des définitions.

6.1 Dirichlet, si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, l'inéquation $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ a une infinité de solutions.

6.2 $\alpha \in \mathbb{R}$ est de type φ s'il existe $C > 0$ tel que $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^2 \varphi(q)}$

6.3 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ n'est pas de type constant s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante $\lim_{t \to +\infty} (\varphi(t) = +\infty$ et si l'équation $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ a une infinité de solutions.

6.4 Rappelons le théorème de Khintchine [1]

Théorème : Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ monotone croissante.

- Si $\sum_{q \neq 0} \frac{1}{q \varphi(q)} < +\infty$ (par exemple $\varphi(t) = (\text{Log } t)^{1+\varepsilon}$), pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, l'inéquation $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ a un nombre fini de solutions.

- Si $\sum_{q \neq 0} \frac{1}{q \varphi(q)} = +\infty$ (par exemple $\varphi(t) = \text{Log } t$), pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, l'inéquation $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ a une infinité de solutions.

6.5 Pour presque $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans 6.3 on peut prendre $\varphi(t) = \text{Log}\, t$. Néanmoins pour tout $\beta > 0$ il existe de $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ satisfaisant une condition diophantienne tel que l'inéquation

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\beta+2}}$$

a une infinité de solutions. Par exemple, 0, 1234567891011...
voir Schneider [1]. (voir aussi 7.9.).

6.6 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est un nombre de Liouville si pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe $\frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$, $q_i \geq 2$ vérifiant

$$|\alpha - \frac{p_i}{q_i}| < \frac{1}{q_i^i}$$

(il en résulte que si $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$).

6.7 Si α est un nombre algébrique de degré d, si $d = 2$ alors α est de type constant.
Si $d \geq 3$ par le théorème Thue Siegel Roth, α est de type Roth (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}$).

7. FRACTION CONTINUE (voir Khintchine [1] et Lang [1] par exemple)

Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ la connaissance du développement en fraction continue de α donne de nombreux renseignements sur les approximations de α par les rationnels.

7.1 Soit $G : [0,1] \to [0,1]$

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x} \pmod 1 \text{ si } x \neq 0,$$
$$G(0) = 0$$

si $\alpha \in [0\,1]$ le développement en fraction continue revient à considérer la suite $\{G^n(\alpha)\}$, l'itéré $n^{\text{ème}}$ de G.
On pose

$$a(X) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha \in [0\,1[- \mathbb{Q}$, on a pour tout n, $G^n(\alpha) \neq 0$, on pose

$$a_o = [\alpha] = 0$$

$$a_n = a(G^{n-1}(\alpha)) \quad \text{si } n \geq 1 \text{ , } a_i \text{ est un entier} \geq 1 .$$

On a

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

$$a_o = [\alpha] \qquad \alpha - [\alpha] \in [0\,1[- \mathbb{Q}$$

et donc s'écrit de façon unique $\alpha - a_o = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots$, les a_i sont appelés les quotients partiels de α.

7.2 Soit si $\alpha = a_o + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots$

$$\frac{p_n}{q_n} = a_o + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$$

les réduites de α .

On a

$$\frac{p_o}{q_o} = \frac{a_o}{1} \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_o a_1 + 1}{a_1}$$

7.3 p_n et q_n vérifient les relations de récurrence si $n \geq 2$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad p_o = a_o \text{ , } p_1 = a_o a_1 + 1$$

$$q_n = q_n\, q_{n-1} + q_{n-2} \qquad q_o = 1 \qquad q_1 = a_1$$

On a par récurrence la relation de Lagrange

7.4 $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$

7.5 On a si $n \geq 1$, $q_{n+1} > q_n$ $(q_1 \geq q_o = 1)$ et aussi

Lemme : si $n \geq 2$ $q_n \geq 2^{\frac{n}{2}}$

Démonstration : On a $q_n \geq 2\, q_{n-2}$, le lemme résulte de $q_o = 1$ et $q_3 \geq 3 \geq 2^{\frac{3}{2}}$. ∎

7.6 On a si $n \geq 1$ et $0 \leq t$ (par récurrence)

$$a_o + \frac{1}{a_1} + \ldots \quad + \frac{1}{a_n + t} = \frac{p_n + t\, p_{n-1}}{q_n + t\, q_{n-1}}$$

Or

$$\alpha = a_o + \frac{1}{a_1} + \ldots \quad + \frac{1}{a_n + G^n(\alpha)}$$

Soit

$$\alpha = \frac{p_n + G^n(\alpha) p_{n-1}}{q_n + G^n(\alpha) q_{n-1}}$$

Soit par 7.4, on a

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\frac{1}{G^n(\alpha)} q_n + q_{n-1})}$$

or $$a_{n+1} \leq \frac{1}{G^n(\alpha)} \leq a_{n+1} + 1$$

7.7 On a donc

$$(-1)^n(\alpha - \frac{p_n}{q_n}) > 0$$

$$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})} \leq \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

puisque $q_{n+1} = a_{n+1}a_n + q_{n-1}$.

7.8 On a

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

7.9 On a la propriété caractéristique des q_n : si $q > 0$ est entier et si $q < q_{n+1}$, alors $\|q\alpha\| \geq \|q_n\alpha\|$

7.8 et 7.9 montrent que la connaissance des a_i et des q_i détermine les approximations de α par les rationnels. Ces deux propriétés permettent de construire des α ayant tel type d'approximation.

7.10 Par 7.3 et 7.6, on conclut que si $n \geq 2$ puisque $(-1)^n(q_n\alpha - p_n) > 0$:

$$|q_{n-2}\alpha - p_{n-2}| = a_n|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| + |q_n\alpha - p_n|$$

Donc $|q_n\alpha - p_n| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$ et puisque $|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$

si $n \geq 1$ $|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{2}$ on a donc

$$|q_n\alpha - p_n| = \|q_n\alpha\|$$

la relation s'écrit si $n \geq 3$

$$\|q_{n-2}\alpha\| = a_n\|q_{n-1}\alpha\| + \|q_n\alpha\|$$

On a aussi si $n \geq 2$

$$2|q_n\alpha - p_n| \leq |q_{n-2}\alpha - p_{n-2}|$$

8. FRACTIONS CONTINUES ET MESURE (voir Khintchine [1])

8.1 Théorème (S. Berstein, E. Borel) : Soit $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}_+$ monotone non décroissante ($\varphi > 0$), si $\sum_i \frac{1}{\varphi(i)} = +\infty$ (par exemple $\varphi(i) = i \operatorname{Log} i$), pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (pour la mesure de Lebesgue) l'inéquation $a_i(\alpha) < \varphi(i)$ a une infinité de solutions.

Si $\sum_i \frac{1}{\varphi(i)} < +\infty$ (par exemple $\varphi(i) = i(\operatorname{Log} i)^{1+\varepsilon}$), pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ l'inéquation

$$a_i(\alpha) < \varphi(i)$$

a un nombre fini de solutions.

8.2 Remarque : $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est de type constant si et seulement si $\sup_i a_i < +\infty$. Il résulte de 8.1 qu'il y a une infinité (puissance du continu) de nombres de type constant.

8.3 α est de type Roth par 7.8 et 7.9 si seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ $a_{n+1} = O(q_n^{\varepsilon})$ (si $n \to +\infty$).

Si α est de type Roth, alors pour tout $\delta > 0$

$$\sum_n \frac{a_{n+1}}{q_n^{\delta}} < +\infty$$

En effet si $\varepsilon < \delta$, on a (par 7.5)

$$\sum_n \frac{a_{n+1}}{q_n^{\delta}} = O\left(\sum_n \frac{1}{q_n^{\delta-\varepsilon}}\right) = O\left(\sum \frac{1}{2^{(\delta-\varepsilon))n/2}}\right) = O(1)$$

8.4 Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, par Khintchine [1] on a

$$\sup_n q_n^{\frac{1}{n}} < +\infty$$

9. NOMBRES DE DENSITE BORNEE

9.1 Définition : Soient $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et a_i les quotients partiels de α. la densité (du développement en fraction continue de α) est

$$d_\alpha = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}\right) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

si $d_\alpha < +\infty$, α est dit de densité bornée.

Exemple de nombres de densité bornée

Par 8.2, si α est un nombre de type constant alors il est de densité bornée. En particulier tout nombre algébrique de degré 2 est de type constant donc de densité bornée. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ayant pour quotients partiels (a_i) avec $a_i = 1$ si $i \neq 2^k$ et $a_{2^k} = k$. Alors α est de densité bornée mais non de type constant.

9.2 Si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ de densité bornée on a

$$a_{i+1}(\alpha) < d_\alpha i \qquad (\text{si } i \geq 1) \text{ et } a_1(\alpha) < d_\alpha$$

9.3 Par 8.1, on conclut que les $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de densité bornée sont de mesure de Lebesgue nulle.

9.4 Pour $\varepsilon > 0$, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, il existe une constante (dépendant de α) tel que pour tout n, on a

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \leq C\, n\, (\text{Log } n)^{1+\varepsilon},$$

et pour une infinité de i, $a_i > i \log i$.

9.5 Invariante de $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ de densité bornée

Si β est un nombre équivalent à α (i.e. $\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Z})$ si et seulement si à partir d'un certain rang α et β ont même développement en fraction continue. Il suit: α est de densité bornée si et seulement si β l'est.

En particulier si α est de densité bornée, $-\alpha$ l'est aussi.

9.6 Type de nombres de densité bornée

Proposition : Soit $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ de densité bornée; alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on ait

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^2 \operatorname{Log} q}$$

Démonstration : En effet par 7.8 et 7.9, il suffit de montrer que

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{C}{q_n^2 \operatorname{Log} q_n}$$

Or on a

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{1}{q_n^2 (a_{n+1}+2)}$$

avec $a_{n+1} \leq d_\alpha$ n et $2^{\frac{n}{2}} \leq q_n$ si $n \geq 2$, donc $n \leq \frac{\operatorname{Log} q_n}{\operatorname{Log}\sqrt{2}}$. Il suit que

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{C}{q_n^2 \operatorname{Log} q_n} \quad . \quad \blacksquare$$

Donc si α est de densité bornée α est de type Roth.

9.7 Si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ est densité bornée, on a $\sup_n q_n^{\frac{1}{n}} < +\infty$.

En effet, on a $q_n \leq (a_n + 1) q_{n-1}$. Soit

$$q_n \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + a_1)$$

donc

$$\frac{1}{n} \operatorname{Log} q_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Log} (1 + a_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \leq d \ .$$

10. CATEGORIE ET NOMBRE DE ROTATION

Soit $0 \leq r \leq +\infty$. Soit $F^r = D^r(T^1) - \text{Int}\, \rho^{-1}(\mathbb{Q})$.
On a par III 6.23 , que F^r est l'adhérence dans la C^r topologie des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel . F^r est un fermé sans point intérieur dans $D^r(T^1)$.

10.1 Proposition : Pour $0 \leq r \leq +\infty$, l'ensemble des f de F^r tels que $\rho(f)$ soit un nombre de Liouville est résiduel dans F^r pour la C^r topologie (c'est même un G_δ dense).

Démonstration : $F^r \cap \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est un F_σ sans point intérieur dense dans F^r la C^r topologie (voir III 6.2.3), et on raisonne comme en 5.4 en utilisant la continuité de ρ. ■

Soit $\frac{1}{2\pi} > a > 0$ fixé et $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b \in D^\omega(T^1)$.

Soit le cantor $K_a = [0,1] - \text{Int}\{b \mid \rho(f_b) \in \mathbb{Q}\}$,(K_a est bien par III.5.2, un cantor).

10.2 Proposition : L'ensemble $\{b \in K_a \mid \rho(f_b)$ est un nombre de Liouville$\}$ est résiduel dans K_a (c'est même un G_δ dense).

Démonstration : $K_a \cap \{b \mid \rho(f_b) \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable dense dans K_a et on raisonne alors comme en 5.4.

10.3 Le rapport entre mesure et nombre de rotation est un problème difficile. Par exemple Arnold [1] a montré que la mesure de Lebesgue $m(K_a) \to 1$ si $a \to 0$, et même mieux la mesure de $\{b \in [0,1] \mid f_b$ est C^ω conjugué à une rotation$\}$ tend 1 si $a \to 0$. C'est absolument non trivial (!).

On peut se poser le problème suivant :
soit $f \in \text{Diff}^o_+(T^1)$ et posons

$$I_f = \{\lambda \in T^1 \mid \rho(R_\lambda \circ f) \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}$$

si m est la mesure de Haar de T^1, soit $f \to M(f)$ avec

$$M(f) = m(I_f) \equiv \text{mesure } (I_f)$$

(I_f est borélien donc universellement mesurable).

Par III.4.2, on voit facilement que $f \to M(f) \in \mathbb{R}_+$ est semi continue inférieurement.

10.4 Problèmes

1) Si $f \in \text{Diff}^\infty_+(T^1)$ est-ce que $M(f) > 0$?

2) Si $f \to Id$ dans la C^∞ topologie, est-ce que $M(f) \to 1$?

C H A P I T R E VI

REMARQUES SUR LE THEOREME DE DENJOY ET SUR LES MESURES σ-FINIES INVARIANTES

Plan :

Notation : s.e.d. = sauf sur un ensemble au plus dénombrable (pouvant être vide).

1. Proposition de Denjoy
2. Rappels sur les fonctions à variation bornée
3. Inégalité de Denjoy-Koksma
4. Inégalité de Denjoy et de classe P
5. Le théorème de Denjoy
6. Sur les mesures σ-finies invariantes
   - 6.1 Rappels
   - 6.2 Mesure σ-finie invariante
   - 6.3 Un exemple d'homéomorphisme PL
   - 6.4 Théorème
   - 6.5 Problème
   - 6.6 Problème
   - 6.7 Conjugaison lipschitzienne de $\bar{f}_{\beta,b}$

Commentaire :

Les résultats de 1 à 5 sont entièrement de Denjoy (voir Denjoy [1], Denjoy [2], et surtout Denjoy [3]). Il nous semble que l'introduction d'une mesure de probabilité invariante simplifie légèrement l'exposition. 1 à 5 sont extrèmement importants pour la suite L'inégalité de Denjoy-Koksma et l'inégalité de Denjoy interviendront constamment en VIII et IX. La définition d'un homéomorphisme de classe P se trouve en 4. Le fait que le théorème de Denjoy reste valable pour les homéomorphismes de classe P de nombre de rotation irrationnel se trouve

déjà remarqué par Denjoy [3].

Nous utilisons ce fait en 6 en l'appliquant à des homéomorphismes PL. Nous montrons en 6 qu'il existe un homéomorphisme PL de T^1 sans mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à la mesure de Haar, m, de T^1.

Le problème de mesure σ-finie invariante et absolument continue est un problème classique. Le premier exemple (non continu) de $f : [0,1] \to [0,1]$ bimesurable pour m, et non m-singulier, sans mesure σ-finie absolument continue par rapport à m a été donné par D. Ornstein, puis A. Brunel a donné un autre exemple. J. P. Conze me signale que l'on peut rendre l'exemple de Brunel continu en l'interprétant convenablement sur un cantor ad hoc.

Il nous semble que le problème 6.6 devrait une fois de plus convaincre le lecteur que l'étude de la famille $b \to f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ est loin d'être terminée.

En 6.7 on étudie la conjugaison lipschitzienne de la famille PL, $f_{\beta,b}$ à des rotations. On détermine même dans certains cas l'homéomorphisme qui conjugue $f_{\beta,b}$ à R_α (si $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbb{Z}\alpha \pmod 1$). C'est tellement rare que cela mérite d'être signalé. 6.7.3 donne une nouvelle démonstration d'un résultat de Kesten [1].

Je remercie J. P. Conze de m'avoir aidé dans le lemme 6.7.2. Je remercie Ledrappier, Strelcyn et Thouvenot de m'avoir signalé le problème des mesures σ-finies invariantes.

1. PROPOSITION DE DENJOY

On a la proposition suivante (Denjoy [1] et [2]).

1.1 Proposition : Soit $f \in \mathrm{Diff}^{o}_{+}(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On suppose que :

1) f est dérivable sauf sur ensemble au plus dénombrable (en abrégé s.e.d.).

2) $Df = h$ s.e.d., avec $h : T^1 \to \mathbb{R}$, $h \geq a > 0$, et h réglée ; Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par f, alors on a :

$$\int_{T^1} (\mathrm{Log}\, h)\, d\mu = 0$$

Démonstration du cas où f est C^1 : On a

$$\mathrm{Log}\, Df^n = \sum_{i=o}^{n-1} (\mathrm{Log}\, Df) \circ f^i$$

donc

$$\frac{1}{n} \mathrm{Log}\, Df^n = \frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n-1} (\mathrm{Log}\, Df) \circ f^i$$

Comme f est uniquement ergodique II.8.2.
si $n \to +\infty$ $\frac{1}{n} \mathrm{Log}\, Df^n$ converge uniformément vers $a = \int_{T^1} (\mathrm{Log}\, Df)\, d\mu$
si $a > 0$, alors si $n \to +\infty$ Df^n converge uniformément vers $+\infty$
si $a < 0$, alors si $n \to +\infty$ Df^n converge uniformément vers 0 or on a

$$\int_{T^1} Df^n(x)\, dx = \int_0^1 Df^n(x)\, dx = 1$$

Donc nécessairement $a = \int_{T^1} (\mathrm{Log}\, Df)\, d\mu = 0$.

Remarque : La même démonstration montre que si $f \in \mathrm{Diff}^{1}_{+}(T^n)$ est difféomorphisme de classe C^1 et si f est uniquement ergodique avec comme unique mesure de probabilité invariante μ, alors

$$\int_{T^n} \mathrm{Log} \left| \det (Df) \right| d\mu = 0$$

Démonstration de 1.1 : D'après Hewitt Stromberg [1 , 18.41d] f et f^{-1} sont absolument continues et f est même un homéomorphisme lipschitzien puisque Df et $Df^{-1} \in L^{\infty}(T^1, dx)$. Donc pour $n \in \mathbb{Z}$, f^n est absolument continue (i.e. l'intégrale indéfinie de sa dérivée pour la mesure de Lebesgue).

Log h est réglé (rappelons qu'une fonction est dite réglée si en tout point elle a une limite à gauche et droite (finis), elle est alors limite uniforme de fonctions en escalier et réciproquement (voir Dieudonné [1]).

Log h est donc borélien et borné (puisque réglé), il est alors bien μ intégrable.

On raisonne par l'absurde ; supposons que $\int_T (\text{Log } h)\, d\mu = a \neq 0$ et que $a > 0$ (le cas $a < 0$ est tout à fait analogue). Soit g une fonction en escalier telle que

$$g \leq \text{Log } h \quad \text{et} \quad \int_{T^1} g\, d\mu \geq \frac{a}{2} > 0$$

(C'est possible puisqu'il existe une suite de fonctions (g_i) en escalier telle si $i \to +\infty, g_1$ converge uniformément vers Log h). Soit g_1 une fonction continue de T^1 dans $\mathbb{R}$ avec $g_i \leq g$ sauf sur ensemble fini avec

$$\int_{T^1} g_1 d\mu \geq \frac{a}{4}$$

(on utilise le fait que μ est sans masse atomique).

On a donc sauf sur un ensemble dénombrable

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_i \circ f^i}{n} \leq \frac{\text{Log } Df^n}{n}$$

puisque $g_1 \leq \text{Log } h = \text{Log } Df$ s.e.d.
Comme f est uniquement ergodique si $n \to +\infty$

$$\sum_{i=o}^{n-1} \frac{g_1 \circ f^i}{n}$$

converge uniformément vers $\int_{T^1} g_1 d\mu \geq \frac{a}{4} > 0$.

Donc pour n assez grand, on a :

$$(*) \qquad Df^n(x) \geq e^{\frac{na}{8}} \quad \text{s.e.d.}$$

Mais $\int_{T^1} D f^n(x)dx = 1$ puisque f^n est absolument continue, ce qui rend (*) impossible, et montre par l'absurde que $a \leq 0$ de façon analogue, on montre que si $a < 0$, alors $a \geq 0$, on a donc

$$\int_{T^1} (\text{Log } h)\, d\mu = 0 \ . \ \blacksquare$$

2. RAPPELS SUR LES FONCTIONS A VARIATION BORNEE

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ $\mathbb{Z}$-périodique; φ est dite une fonction à variation bornée sur T^1 si φ est à variation bornée sur $[0,1]$. On note $\text{Var}(\varphi)$ la variation de φ sur $[0,1]$.
Si φ est à variation bornée sur T^1 sa dérivée au sens des distributions est une mesure μ de norme $\text{Var}(\varphi)$.

On a les lemmes :

2.1 Lemme : Soit $\varphi : T^1 \to [a,b]$ une fonction à variation bornée soit $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne (soit k, tel que pour tout x et $y \in [a,b]$ on a $|\psi(x) - \psi(y)| \leq k|x-y|$) alors $\psi \circ \varphi$ est à variation bornée et

$$\text{Var}(\psi \circ \varphi) \leq k \, \text{Var}(\varphi)$$

2.2 Lemme : Soit $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée et $f : T^1 \to T^1$ un homéomorphisme .
$\varphi \circ f$ est à variation bornée sur T^1 et $\text{Var}(\varphi \circ f) = \text{Var}(\varphi)$.

Démonstration : Il est élémentaire de voir que

$$\text{Var}(\varphi \circ R_\alpha) = \text{Var}(\varphi)$$

On peut donc supposer que $f(0) = 0$ (quitte à remplacer f par $f \circ R_c$).

On écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ sur $[0,1]$ avec φ_1 et φ_2 monotone croissante et $\mathrm{Var}(\varphi) = (\varphi_1(1) - \varphi_1(0)) + (\varphi_2(1) - \varphi_2(0)) = \mathrm{Var}(\varphi_1) + \mathrm{Var}(\varphi_2)$. (En effet la dérivée au sens des distributions de φ est une mesure $\mu = \mu_+ + \mu_-$).
On a :

$$\varphi \circ f = \varphi_1 \circ f - \varphi_2 \circ f$$

donc

$$\mathrm{Var}(\varphi \circ f) \leq \mathrm{Var}(\varphi_1 \circ f) + \mathrm{Var}(\varphi_2 \circ f) = \mathrm{Var}(\varphi)$$

On a donc aussi

$$\mathrm{Var}(\varphi \circ f \circ f^{-1}) \leq \mathrm{Var}(\varphi \circ f)$$

il résulte bien que l'on a :

$$\mathrm{Var}(\varphi \circ f) = \mathrm{Var}(\varphi). \quad \blacksquare$$

3. INEGALITE DE DENJOY-KOKSMA

Proposition : Soit $f \in D^0(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ (par exemple $\frac{p}{q}$ est une réduite de α).

Soit $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée (non nécessairement continue), et soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ (i.e. $\bar{f}_* \mu = \mu$).
Alors on a :

$$\sup_{x \in T^1} \left| \sum_{i=0}^{q-1} \varphi \circ \bar{f}^i(x) - q\,\mu(\varphi) \right| \leq \mathrm{Var}(\varphi)$$

Remarque : L'inégalité de Denjoy-Koksma implique que μ est unique (en effet on choisit par Dirichlet une suite $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$ et $q_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$, alors $\frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi \circ f^i$ converge uniformément vers $\mu(\varphi)$, donc deux mesures de probabilité invariantes par $\bar{f}$ coïncident sur le sous-espace dense $C^0(T)$ des fonctions continue à variation bornée ; et donc coïncident.

Démonstration : Soit $h(x) = \int_o^x d\mu$, h est continue non décroissante,

et on a pour tout $x \in \mathbf{R}, h(x+1) = h(x) + 1$.

On a

$$\bar{h} \circ \bar{f} = R_\alpha \circ \bar{h}$$

soit sur T^1, on a $\bar{h} \circ \bar{f} = R_\alpha \circ \bar{h}$, $\bar{h} : T^1 \to T^1$ préserve l'ordre et continue surjective ; $\bar{h}$ est non strictement monotone sur un ensemble de μ mesure nulle. De plus, on a si $i \in \mathbf{N}$, $\bar{h} \circ \bar{f}^i = R_{i\alpha} \circ \bar{h}$.
Fixons $x \in T^1$, on a :

$$\bar{h}(\bar{f}^{-1}(x)) = i\alpha + \bar{h}(x) \pmod 1.$$

Affirmation : Considérons les points $i\alpha \pmod 1$ pour $1 \le i \le q$, alors il y a un et un seul point $i\alpha \pmod 1$ dans chaque intervalle

$$\left]\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right[\qquad 0 \le k \le q-1$$

Pour $0 \le i \le q-1$, on convient que 0 appartient au même intervalle que $q\alpha \pmod 1$ et avec cette convention, il y a un seul et un seul point $i\alpha$ $0 \le i \le q-1$ dans chaque $(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q})$.

En effet si $0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2}$, on a si $1 \le i \le q$, $0 < i\alpha - i\frac{p}{q} < \frac{1}{q}$
et si $-\frac{1}{q^2} < \alpha - \frac{p}{q} < 0$, on a pour $1 \le i \le q$, $-\frac{1}{q} < i\alpha - \frac{ip}{q} < 0$.
Le résultat de l'affirmation suit de ce que la longueur $\left]\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right[$ est $\frac{1}{q}$ et qu'il y a q points. ∎

Fin de la démonstration de l'inégalité de Denjoy-Koksma

On choisit $y_o = y_q = \bar{f}^o(x) = x$ et y_i tel que
$\bar{h}(y_i) = \frac{i}{q} + \bar{h}(x) \bmod 1$, $1 \le i \le q-1$. On a alors pour $0 \le k \le q-1$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} d\mu = \frac{1}{q}$$

puisque $\bar{h}_* \mu = m$ = mesure de Haar sur T^1 en fait

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} d\mu = h(y_{k+1}) - h(y_k) = \frac{1}{q}$$

et cela ne dépend pas du choix des y_i.

Il résulte de l'affirmation que pour $0 \leq i \leq q-1$.
Dans chaque intervalle, $]y_k, y_{k+1}[$ il y a un unique $\bar{f}^i(x)$ $\quad 0 \leq i \leq q-1$
avec la convention que $\bar{f}^o(x) = x$ appartient au même intervalle que $\bar{f}^q(x)$
(i.e. si $0 < \alpha - \frac{p}{q}$ $\quad x \in [x, y_1]$ et si $\alpha - \frac{p}{q} < 0$, $x \in [y_{q-1}, x]$).

Désignons par $]y_{k_i}, y_{k_i+1}[$ l'unique intervalle auquel appartient $f^i(x)$.

On a

$$\left| \sum_{i=o}^{q-1} \varphi \circ \bar{f}^i(x) - q \int_o^1 \varphi(t) d\mu(t) \right| = \left| \sum_{i=o}^{q-1} (\varphi \circ \bar{f}^i(x) - q \int_{y_{k_i}}^{y_{k_i+1}} \varphi(t) d\mu(t)) \right|$$

$$\leq \sum_i q \left| \int_{y_{k_i}}^{y_{k_i+1}} (\varphi(\bar{f}^i(x) - \varphi(t)) d\mu(t) \right|$$

$$\leq \sum_{i=o}^{q-1} \sup_{t \in [y_{k_i}, y_{k_i+1}]} |\varphi(\bar{f}^i(x)) - \varphi(t)| \leq \mathrm{Var}(\varphi)$$

comme c'est vrai pour tout $x \in T^1$, l'inégalité est démontrée. ∎

Remarque : Si on désigne par $D_n(\alpha)$ la discrépance de α (voir Kuipers et Neiderreiter [1]).
Il n'est pas difficile de montrer en suivant Denjoy [3] que si
$\varphi : T^1 \to \mathbb{R}$, est variation bornée, $f \in D^o(T)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors on a

$$\sup_{x \in T^1} \left| \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i(x) - n \int_{T^1} \varphi \, d\mu \right| \leq \mathrm{Var}(\varphi)(n D_n(\alpha))$$

De plus si $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ alors on a $q D_q(\alpha) < 2$ par argument analogue à l'affirmation. Si f est C^o conjugué à R_α c'est précisément par changement de variable, l'inégalité de Koksma.

4. INEGALITE DE DENJOY ET DE CLASSE P

4.1 Définition de la classe P : Soit $f \in D^0(T^1)$: f est de classe P si elle est dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable et que sa dérivée est égale, sauf sur un ensemble au plus dénombrable à une fonction $\mathbb{Z}$- périodique $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, minorée par un réel $a > 0$, et à variation bornée sur $[0,1]$.

4.2 Remarques : 1) Si $f \in D^0(T^1)$ est de classe P alors par Hewitt Stromberg [1,18.41 d] f et f^{-1} sont absolument continues et même f est homéomorphisme lipschitzien (f et f^{-1} sont des applications lipschitziennes) puisque Df et $Df^{-1} \in L^\infty(T,dx)$.

2) si f est de classe P, f^{-1} l'est aussi.

3) les homéomorphismes de classe P forment un groupe.

4) Log h est alors à variation bornée et on pose

$$V = \text{"Var (Log Df)"} = \text{Var (Log h)}.$$

En fait on choisit V le plus petit possible.

4.3 Exemples : 1) si $f \in D^1(T^1)$ et Df est à variation bornée alors f est de classe P.

2) si f est un homéomorphisme PL de T^1, f est de classe P (PL = linéaire par morceaux en nombre finis).

4.4 Proposition (Inégalité de Denjoy) : Soit $f \in D^0(T^1)$ f de classe P, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ tel que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$.

Alors sauf sur ensemble au plus dénombrable, on a

$$e^{-V} \leq Df^{\pm q_n} \leq e^{V} \qquad \text{avec } V = \text{Var}(\text{Log Df}) = (\text{Var (Log h)}).$$

Démonstration : On a s.e.d.

$$\text{Log } Df^n = \sum_{i=o}^{n-1} \text{Log Df} \circ f^i = \sum_{i=o}^{n-1} \text{Log h} \circ f^i$$

On a par la proposition 1.1

$$\int_{T^1} \text{Log } Df \, d\mu \equiv \int_{T^1} \text{Log } h \, d\mu = 0$$

(en fait cela résulte aussi de l'inégalité de Denjoy-Koksma 3 .)

Par l'inégalité de Denjoy-Koksma, on a :

$$\sup_{x \in T^1} \left| \sum_{i=o}^{q_{n-1}} \text{Log } h \circ f^i(x) - q_n \int_T \text{Log } h \, d\mu \right| \leq V$$

donc on a sauf sur ensemble au plus dénombrable

$$-V \leq \text{Log } Df^{q_n} \leq V$$

soit

$$e^{-V} \leq Df^{q_n} \leq e^{V} \qquad \text{s.e.d.}$$

comme $Df^{-q_n} = \dfrac{1}{Df^{q_n} \circ f^{-1}}$ on a bien l'inégalité . ∎

4.5 Corollaire : Soit $f \in D^0(T^1)$ de classe P, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ et si $\dfrac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ vérifient $\left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^2}$, alors on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{-V}|x-y| \leq \left| f^{q_n}(x) - f^{q_n}(y) \right| \leq e^{V}|x-y|$$

Démonstration : Immédiate par l'inégalité de Denjoy 4.4 et le fait que f et f^{-1} sont absolument continue. ∎

5. LE THEOREME DE DENJOY

5.1 Soit f un homéomorphisme lipschitzien de T^1 (f et f^{-1} sont lipschitzien de T^1 dans T^1 pour la métrique standard). Désignons par m = dx la mesure de Haar, alors f préserve l'ensemble des ensembles m-mesurables; si A est m-mesurable alors m(A) = 0 est équivalent à ce que m(f(A)) = 0. f est dite alors m-non singulière (i.e. f et f^{-1} laissent m quasi invariante).

5.2 Définition : Un homéomorphisme f de T^1 m-non singulier est m-incompressible si pour tout ensemble A m-mesurable avec m(A) > 0 alors les ensembles $f^n(A)$ $n \in \mathbb{N}$ ne sont pas tous disjoints (m presque partout).

On a la proposition de Denjoy [3].

5.3 Proposition : Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ un homéomorphisme de classe P avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors f est m-incompressible.

Démonstration : Immédiate par l'inégalité de Denjoy 4.4 et le fait que f est absolument continue, (en fait f est homéomorphisme lipschitzien par 4.2 remarque 1) et aussi qu'il existe une infinité de $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ avec si $n \to +\infty$, $q_n \to +\infty$, vérifiant $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$, par exemple les réduites de α. ∎

On a le théorème de Denjoy [2] [3] 1932 et 1946 .

5.5 Théorème : Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ avec f de classe P et $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ alors f est C^0 conjugué à R_α.

Démonstration : Par l'absurde .
Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par f.
Soit $h(x) = \int_0^x d\mu$, on a que h est continue non décroissante et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x+1) = h(x)+1$. On a sur T^1 :

$$h \circ f = R_\alpha \circ h$$

h est homéomorphisme si et seulement si $\mathrm{supp}\,\mu = T^1$. Si $\mathrm{supp}\,\mu \neq T^1$ alors f n'est pas C^0 conjugué à R_α puisque supp μ est invariant par f et donc f n'est pas minimal et donc pas C^0 conjugué à R_α.

Si $\operatorname{supp}\mu \neq T^1$ alors l'ouvert $U = T^1 - \operatorname{supp}\mu$ est invariant par f soit I_o une composante connexe de U.
On a alors que les $f^n(I_o)$ sont disjoints (i.e. I_o est errant (ou wandering)) puisque f est sans points périodiques. f n'est pas m-incompressible (m-mesure de Haar de T^1) ce qui est contraire à 5.3. ∎

5.6 Remarque : 1) La démonstration du théorème de Denjoy étant par l'absurde, on ne peut rien dire de l'homéomorphisme h qui conjugue f à R_α (i.e. $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$).

Problème : Si f est de classe P avec $\rho(f) = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, est-ce que les modules de continuité de h^{-1} et h ne dépendent que de la nature arithmétique de α (i.e. les approximations de α par les rationnels) ?

Nous donnerons en IX.3 une réponse partielle à cette question. Voir aussi XII.2.2 .

2) Toujours sous les mêmes hypothèses que le théorème de Denjoy, par 4.5 $(f^{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille équicontinue (avec $q_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$) et on pouvait appliquer II.9.
Ceci implique par X.1.1 que

$$K_o(f) = \operatorname*{Inf}_{n \geq 1} d(f^n, Id) = 0$$

avec $d(f^n, Id) = \operatorname*{Max}_{x \in T^1} \|f^n(x) - x\|$. On montrera en IX.3.1 que si $\frac{p_n}{q_n}$ sont les réduites du développement en fraction continue de α alors il existe une constante C dépendant de f tel que

$$d(f^{q_n}, Id) \leq C\,\lambda^n \quad \text{avec} \quad \lambda = (1+e^{-V})^{-1/2} < 1$$

3) On a d'après XII.2.3 si $a \neq 0$, $|a| < \frac{1}{2\pi}$ est fixé; il existe b tel que $f_b = x + a \sin 2\pi x + b$, tel que $\alpha = \rho(f_b) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |D f_b^n|_o = H_1(f_b) = +\infty$ (i.e. f_b n'est pas C^1 conjugué à R_α mais il doit être C^o conjugué par le théorème de Denjoy).

Donc l'inégalité de Denjoy 4.4 est qualitativement la meilleure.

Rappelons que $H_1(f) < +\infty$ est équivalent à ce f soit C^1 conjugué à une rotation.

6. SUR LES MESURES σ-FINIES INVARIANTES

6.1 Rappels

6.1.1 Soit f un homéomorphisme lipschitzien de T^1 (i.e. il existe k, tel que pour tout $x,y \in T^1$ on a

$$\frac{1}{k}\|x-y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\| \quad , \text{ avec si } x \in T^1, \ \|x\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{x} + p|$$

où $\tilde{x}$ est un relèvement de x à $\mathbb{R}$) .

Alors f et f^{-1} laissent la mesure de Haar m quasi invariante.

6.1.2 Définition : f est un ergodique si pour tout A m-mesurable avec f(A) = A m-presque partout implique que m(A) = 0 ou 1.

Une condition nécessaire est évidemment que f soit m-incompressible et que $\rho(f) \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

6.1.3 Si $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}$ est m-mesurable alors $\varphi \circ f$ est m mesurable, et si $\varphi_1 = \varphi$ m-presque partout alors $\varphi \circ f = \varphi_1 \circ f$ m-presque partout, de plus si $\varphi \in L^1(T^1,m)$ alors $\varphi \circ f \in L^1(T^1,m)$ puisque

$$|\varphi \circ f|_{L^1} = \int_{T^1} |\varphi \circ f(x)|\,dx = \int_{T^1} |\varphi \circ f(x)|\,(Df(x)\|\frac{1}{Df(x)}|\,dx \leq |\varphi|_{L^1}\,|\frac{1}{Df}|_{L^\infty}$$

et que $|\frac{1}{Df}|_{L^\infty} < +\infty$ puisque f est homéomorphisme lipschitzien.

6.2 Mesure σ-finie invariante

Rappelons que par le théorème de Radon Nikodym f a une mesure σ-finie positive et absolument continue par rapport à m, si et seulement si il existe $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}_+$, φ m-mesurable, avec $\varphi^{-1}(]0,+\infty[) = A$ tel que m(A) > 0 et vérifiant :

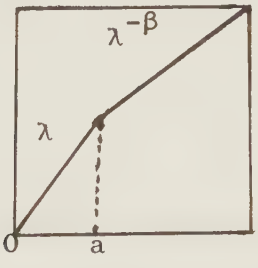
$$\boxed{\varphi \circ f.Df = \varphi \quad m \text{ presque partout.}}$$

Remarquons que puisque f est homéomorphisme lipschitzien, on a $f(A) = A$ m.presque partout.

6.3 Un exemple d'homéomorphisme PL

Soit $\lambda > 1$ fixé et $\beta > 0$ deux paramètres réels. On pose si $x \in [0,1]$:

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ \lambda^{-\beta}(x-1)+1 & \quad\quad a \le x \le 1 \end{cases}$$



avec $\lambda a = \lambda^{-\beta}(a-1) + 1$.

Si $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$f_\beta(x+n) = f_\beta(x) + n$$

On a $f_\beta \in D^0(T^1)$, de plus f_β est un homéomorphisme PL.

Soit

$$f_{\beta,b} = R_b \circ f_\beta = f_\beta + b$$

et $\tilde{f}_{\beta,b}$ l'homéomorphisme PL induit sur T^1.

Quand b varie dans $\mathbb{R}$, $\rho(f_{\beta,b})$ est continue croissante et $\rho(f_{\beta,b+1}) = \rho(f_{\beta,b}) + 1$ et donc $\rho(f_{\beta,b})$ prend toutes les valeurs.

6.4 Théorème : Si $\beta = 1$, soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \rho(\bar{f}_{1,b}) \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ alors $\bar{f}_{1,b}$ n'a pas de mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à la mesure de Haar m.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin des lemmes suivants :

6.4.1 Supposons que $\bar{f}_{\beta,b}$ a une mesure σ-fini invariante alors par 6.2, soit $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}_+$ une solution non triviale de

$$\varphi \circ \bar{f}_{\beta,b} \, D\bar{f}_{\beta,b} = \varphi$$

avec φ m-mesurable et $A = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ avec $m(A) > 0$ et de plus A est invariant par $\bar{f}_{\beta,b}$

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} \exp\left(2\pi i \dfrac{\operatorname{Log}\varphi(x)}{\operatorname{Log}\lambda(1+\beta)}\right) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in T^1 - A \end{cases}$$

g est m mesurable, $g \in L^\infty(T^1, m, \mathbb{C})$ et $|g|_{L^1} = m(A)$ (si $x \in A$, $g(x) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$).

On a le lemme :

6.4.2 Lemme : On a $g \circ f_{\beta,b} = e^{\frac{2\pi i \beta}{1+\beta}} . g$ m-presque partout.

Démonstration : Comme A est invariant par f (et m-mesurable) $T^1 - A$ est invariant par f et on a bien 6.4.2 pour m-presque tout $x \in T^1 - A$.
Si $x \in A$, alors on a :

$$\operatorname{Log} \varphi \circ \bar{f}_{\beta,b}(x) + \operatorname{Log} D\bar{f}_{\beta,b}(x) = \operatorname{Log}\varphi(x) \quad \text{m-presque partout.}$$

Or on a sauf en 2 points

$$\frac{\operatorname{Log} D\bar{f}_{\beta,b}(x)}{\operatorname{Log}\lambda(1+\beta)} = \chi_{[0,a]} - \frac{\beta}{1+\beta} \quad \text{ou} \quad \chi_{[0,a]} \quad \text{est la fonction}$$

caractéristique de $[0,1]$ ($\lambda a = \lambda^{-\beta}(a-1)+1$).
On a donc pour m-presque tout $x \in A$ (en passant à $e^{2\pi i}$ les deux membres) :

$$g \circ \bar{f}_{\beta,p}(x) = e^{\frac{2\pi i \beta}{1+\beta}} g(x). \quad \blacksquare$$

6.4.3 Lemme : Soit $f \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ un homéomorphisme de classe p, $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ avec $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$ et $q_n < q_{n+1}$ alors si $\varphi \in L^1(T^1,m)$, $\lim_{n \to +\infty} |\varphi \circ f^{q_n} - \varphi|_{L^1} = 0$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ il faut déterminer n_o tel que si $n \geq n_o$, on ait $|\varphi \circ f^{q_n} - \varphi|_{L^1} \leq \varepsilon$.

Soit $\varphi_1 : T^1 \to \mathbb{R}$ continue tel que

$$|\varphi - \varphi_1|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2(e^V+1)}$$

avec V = " Var (Log Df)".

On a

$$|\varphi \circ f^{q_n} - \varphi|_{L^1} \leq |(\varphi - \varphi_1) \circ f^{q_n}|_{L^1} + |\varphi - \varphi_1|_{L^1} + |\varphi_1 \circ f^{a_n} - \varphi_1|_{L^1}$$

Par l'inégalité de Denjoy et la formule changement de variable

$$|(\varphi - \varphi_1) \circ f^{q_n}| \leq |\varphi - \varphi_1|_{L^1} \left|\frac{1}{Df^{q_n}}\right|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2(e^V+1)} \, e^V$$

On a

$$|\varphi_1 \circ f^{q_n} - \varphi_1|_{L^1} \leq |\varphi_1 \circ f^{q_n} - \varphi_1|_o$$

Comme $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec h homéomorphisme de T^1, d'après le théorème de Denjoy, on a $f^{q_n} \to Id$ si $n \to +\infty$ dans la C^o topologie puisque $q_n \alpha \to 0 \pmod 1$, donc si $n \to +\infty$ $|\varphi_1 \circ f^{q_n} - \varphi_1|_o \to 0$ (puisque φ_1 est continue).

Soit n_o tel que si $n \geq n_o$, on ait $|\varphi_1 \circ f^{q_n} - \varphi_1|_o \leq \frac{\varepsilon}{2}$

alors pour $n \geq n_o$, on a

$$|\varphi \circ f^{q_n} - \varphi|_{L^1} \leq \varepsilon \, . \quad \blacksquare$$

6.4.4 Lemme : Soient $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et $\frac{p_n}{q_n}$ les réduites de α (on a $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$) alors une infinité de q_n sont impairs.

Démonstration : On a la relation de Lagrange

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$$

donc si q_{n-1} est pair q_n est impair ce qui implique qu'il a une infinité de q_n impairs. ∎

6.4.5 Démonstration du théorème 6.7 : Par l'absurde .

Supposons $\beta = 1$ et que $\rho(\bar{f}_{1,b}) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Par 6.4.2 il existe $g \in L^\infty(T^1, m, \mathbb{C})$, $|g|_{L^1} = m(A) > 0$ et vérifiant

$$g \circ \bar{f}_{1,b} = e^{i\pi} g = -g$$

On a donc

$$g \circ \bar{f}^n_{1,b} - g = ((-1)^n - 1)g$$

donc

$$|g \circ \bar{f}^n_{1,b} - g|_{L^1} = \begin{cases} 2m(A) & \text{si } n \text{ est impair} = (2k+1) \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} = 2k \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

soit $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ avec $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$ $q_n < q_{n+1}$.

On a par 6.4.3

$$\lim_{n \to \infty} |g \circ \bar{f}^{q_n}_{1,b} - g|_{L^1} = 0$$

si q_n est impair, on a

$$|g \circ \bar{f}^{q_n}_{1,b} - g|_{L^1} = 2m(A)$$

Par le lemme 6.4.4, il existe un infinité de q_n impairs et donc par l'absurde le théorème résulte . ∎

6.4.6 Remarque : Si $\rho(\bar{f}_{\beta,b}) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, si q_n sont les dénominateurs des réduites de α, si $\frac{q_n \beta}{1+\beta}$ ne tend vers 0 (mod 1) si $n \to +\infty$ alors $\bar{f}_{\beta,b}$ n'a pas mesure σ-finie invariante absolument continue pas rapport à m.

6.5 Problème : Si $f \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ est un homéomorphisme de classe P avec $\rho(f) \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est ce que f est m-ergodique ?

On montrera VIII.1.4 que si f est de classe C^2 la réponse est oui (C^1 plus lipschitz suffit).

6.6 Problème : Soit $0 < a < \frac{1}{2\pi}$ fixé. Est-ce qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{f}_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ n'a pas de mesure σ-finie invariante par $\bar{f}_b$ est absolument continue par rapport à m ? (voir XII.1).

6.7 Conjugaison lipschitzienne de $\bar{f}_{\beta,b}$

On a la

6.7.1 Proposition : Soit $\rho(\bar{f}_{\beta,b}) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $\bar{f}_{\beta,b}$ est conjugué à R_α par homéomorphisme lipschitzien (en fait C^∞ par morceaux finis).

2) $\bar{f}_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec h et h^{-1} sont des homéomorphismes de T^1 absolument continus.

3) $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbb{Z}\,\alpha \pmod 1$.

Démonstration : 1) implique 2) trivialement.
Montrons que 2) implique 3). Si on suppose 2), alors $\bar{f}_{\beta,b}$ a une mesure de probabilité invariante équivalente à la mesure de Haar, donc par Radon Nikodym, il existe $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}_+$, $\varphi \in L^1(T,m), \varphi > 0$ vérifiant

$$\varphi \circ f_{\beta,b} \cdot Df_{\beta,b} = \varphi \quad \text{m-presque partout}$$

donc par 6.4.1 et 6.4.2 il existe $g \in L^\infty(T^1,m,\mathbb{C})$, $|g|_{L^1} = 1$ et vérifiant :

$$* \quad g \circ \bar{f}_{\beta,b} = e^{\frac{2\pi i \beta}{1+\beta}} g \quad \text{presque partout .}$$

Comme par hypothèse $\bar{f}_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec h et h^{-1} sont absolument continues, $g \circ h^{-1}$ est m-mesurable et $|g \circ h^{-1}|_{L^1} = 1$ de plus, en composant l'égalité * à droite par h^{-1}, on a : $\int g \circ h^{-1} \circ R_\alpha = e^{\frac{2\pi i \beta}{1+\beta}} g \circ h^{-1}$ m-presque partout donc $g \circ h^{-1}$ est un vecteur propre dans $L^2(T,m,\mathbb{C})$ pour la transformation $\varphi \to \varphi \circ R_\alpha$, de valeur propre $e^{\frac{2\pi i \beta}{1+\beta}}$;

soit $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbb{Z}\alpha \pmod 1$.

Montrons que 3) implique 1.

6.7.2 Lemme : Soit $\gamma = j\alpha$, $j \in \mathbb{Z}$, il existe $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}$ avec φ dérivable sauf sur un ensemble fini et $D\varphi$ est une fonction constante (φ n'est pas continue) et vérifiant :

$$\varphi \circ R_\alpha - \varphi = \chi_{[0,\gamma]} - \gamma \qquad 0 < \gamma < 1$$

Démonstration : Soit $\psi(x) = x - [x]$ ($[x]$ étant la partie entière de x). On a si $0 < \gamma < 1$ sur T^1

$$\psi(x-\gamma) - \psi(x) = \chi_{[0,\gamma[} - \gamma$$

ce qui montre l'affirmation si $\frac{\beta}{1+\beta} = \pm\alpha \pmod 1$.

Si $0 < j\alpha < 1$, $j \geq 2$ ♦. On a $\varphi_1 \circ R_{j\alpha} - \varphi_1 = \chi_{[0,j\alpha]} - j\alpha$, $\varphi_1(x) = -\psi(x - j\alpha)$.

Soit $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_1 \circ R_{(j-1)\alpha}$. On a

$$\varphi \circ R_\alpha - \varphi = \chi_{[0,\alpha[} - j\alpha \ . \quad \blacksquare$$

Fin de la démonstration de 3) implique 1)

On a $\bar{f}_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec $h(0) = 0$, $h \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ par le théorème de Denjoy.

On a

♦ Je remercie J. P. Conze de m'avoir signalé ce cas.

$$\text{Log } D\bar{f}_{\beta,b} \circ h^{-1}(x) = \begin{cases} \text{Log}\,\lambda & \text{si } 0 < x < \frac{\beta}{1+\beta} \\ -\beta\,\text{Log}\,\lambda & \text{si } \frac{\beta}{1+\beta} < x < 1 \end{cases}$$

Puisque par la proposition 1.1, on a

$$\int_{T^1} \text{Log } D\bar{f}_{\beta,b}\, d\mu = \int_{T^1} \text{Log } D\bar{f}_{\beta,b} \circ h^{-1}(x)dx = 0$$

donc

$$\text{Log } D\bar{f}_{\beta,b} \circ h^{-1} = (\text{Log}\,\lambda)(1+\beta)\left[\chi_{\left[0,\frac{\beta}{1+\beta}\right[} - \frac{\beta}{1+\beta}\right]$$

Si $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbb{Z}\alpha$ (mod. 1) par le lemme 6.7.2, il existe φ linéaire par morceau fini (mais non continue) tel que

$$\varphi \circ R_\alpha - \varphi = \text{Log } D\bar{f}_{\beta,b} \circ h^{-1} .$$

On pose

$$\text{Log } Dh^{-1} = \varphi + C$$

soit

$$h^{-1} = \int_0^x e^{\varphi(x)+C}dx$$

C étant choisi tel que $\int_0^1 e^{\varphi(x)+C}dx = 1$, $h \in D^0(T^1)$ de plus h est de classe P (mais non PL) et on a

$$D\bar{f}_{\beta,b} \circ h^{-1} \cdot Dh^{-1} = Dh^{-1} \circ R_\alpha ,$$

donc

$$\bar{f}_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h. \quad \blacksquare$$

6.7.3 On a le résultat suivant qui est le résultat de Kesten [1]. (Pour une autre démonstration très élégante voir Petersen [1]).

Proposition : Les affirmations suivantes sont équivalentes

1) Il existe x_o tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} Df^n_{\beta,b}(x_o) < +\infty$$

2) $k = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |Df^n_{\beta,b}|_{L^\infty} < +\infty$

3) $\bar{f}_{\beta,b}$ est conjugué à R_α $(\alpha = \rho(\bar{f}_{\beta,b}))$ par homéomorphisme lipschitzien.

4) $\frac{\beta}{1+\beta} \in \mathbb{Z}\,\alpha \bmod 1$

Démonstration : Pour 1) implique 2) c'est élémentaire (voir Petersen [1]).

3) implique 1) est élémentaire puisque

$$D\bar{f}_{\beta,b} = Dh^{-1} \circ R_\alpha \circ h \,.\, Dh$$

avec h est lipschitzien et Dh^{-1} et $Dh \in L^\infty(T^1,m)$

3) est équivalent à 4) par la proposition 6.7.1.
Il reste à voir que 2) implique 3).

On a sur $\mathbb{R}$ pour tout x et y $\in \mathbb{R}$ et tout n par 2)
$\frac{1}{k}|x-y| \le |f^n_{\beta,b}(x) - f^n_{\beta,b}(y)| \le k|x-y|$. Si on pose :

$$S_n(f) = \sum_{i=o}^{n-1} \frac{f^i_{\beta,b} - i\alpha}{n}$$

si $n \to +\infty$, $S_n(f)$ converge uniformément sur tout compact vers un $h \in D^o(T^1)$ avec

$$f_{\beta,b} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h.$$

On a $\frac{1}{k}|x-y| \le |S_n(f)(x) - S_n(f)(y)| \le k|x-y|$, donc par passage à la

limite :

$$\frac{1}{k}|x - y| \leq |h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

h est bien homéomorphisme lipschitzien. ∎

Remarque : En utilisant 6.4.6 et 6.7.1, on peut montrer en utilisant des arguments de catégorie de Baire, que pour tout $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe β et b tel que $\rho(f_{\beta,b}) = \alpha$, $f_{\beta,b}$ est m-ergodique, $\bar{f}_{\beta,b}$ n'a pas de mesure σ-finie invariante absolument continue par rapport à la mesure de Haar m. (On montre d'une part que les β qui satisfont 6.4.6 sont résiduels, et d'autre part, en utilisant le théorème de Chacon-Ornstein, que l'ensemble des β pour lesquels $\bar{f}_{\beta,b}$ est m-ergodique, est un G_δ dense par 6.7.1).

C H A P I T R E V I I

UN THEOREME LOCAL DE CONJUGAISON

Plan :

1. Introduction et notations.

2. Enoncé du théorème.

3. Préliminaires sur les fonctions $\mathbb{R}$-analytiques.
   - 3.1 Notations.
   - 3.2 Définition de C^{ω}_{h}.
   - 3.3 Définition de $C^{\omega}_{h,q}$.
   - 3.4 Fonction C^{ω}.
   - 3.5 Coefficient de Fourier.
   - 3.6 Remarque.
   - 3.7 Définition de $D^{\omega}_{h,q}$.
   - 3.8 Composition.
   - 3.9 Inégalité de Cauchy.

4. L'équation linéarisée.
   - 4.1 Proposition.
   - 4.2 Remarque.
   - 4.3 Cas de T^1.

5. Le théorème d'Arnold.
   - 5.1 Introduction. Notations U_h, V^i_ν, W_ν.
   - 5.2 Enoncé du théorème d'Arnold.
     - 5.2.A) Principe de la démonstration.
     - B) Inversion de la différentielle à un terme quadratique près, par un opérateur non borné.
     - C) Démonstration.
     - D) Unicité locale.

6. Rappels sur les approximations des fonctions C^r.
   - 6.1 Proposition.
   - 6.2 Cas $\varphi \in C^{\omega}_{h}$.
   - 6.3 Remarque : continuité.

7. Démonstration du théorème de conjugaison locale : le théorème d'Arnold implique le théorème de conjugaison locale (d'après J. Moser).

7.A) Détermination de $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ et s envoie $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ dans $\mathbb{R}^n \times D^\theta(T^n,0)$.

B) Si $r \geq 2\theta$, $r-\theta$ non entier, s envoie $V^{2\theta}_{\alpha} \cap D^r(T^n)$ dans $\mathbb{R}^n \times D^{r-\theta}(T^n,0)$.

C) Cas $r = +\infty$.

D) Continuité de s.

E) Cas C^ω.

8. Remarques sur l'équation linéarisée.

8.1 Proposition, cas C^r, $r < +\infty$.

8.2 Cas de T^1.

Commentaire :

On se propose de démontrer le théorème dû essentiellement à V.I. Arnold [1] et J. Moser [1]. Leur démonstration suit une idée de Kolmogorov et utilise l'action de groupe.

La démonstration que nous proposons suit une idée de H. Rüssmann [1] ; démonstration plus proche de la méthode de Newton : on inverse la différentielle à terme quadratique près. Zehnder [1], [2], a aussi formalisé cette idée. Notre démonstration nous permet d'obtenir un voisinage dans la $C^{2+\varepsilon}$-topologie pour presque tout nombre pour $n = 1$ (sur T^1).

On peut inverser exactement la différentielle de $(\lambda,g) \to R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$, voir XIV, mais l'inversion à un terme quadratique près permet de contrôler les domaines d'analyticité dans le cas C^ω.
A notre connaissance, les constantes et le cas C^ω dans le théorème de 2.2 sont nouveaux. D'ailleurs, nous discutons les voisinages $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ dans le cas de T^1 en 2.4. Le lecteur se reportera aussi à l'exemple sur T^3 de XIII.6.

Le lecteur intéressé seulement par l'équation linéarisée peut lire indépendamment 3., 4., 6. et 8.

***

1. NOTATIONS ET RAPPELS.

Soit $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Si $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sup_i |x_i|$.

Soient, si $0 \le r \le \omega$[♦], $C^r(T^n)$ les fonctions C^r sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$-périodiques, et on munit cet espace de la C^r-topologie.

Si r est entier ou $+\infty$ ou ω, c'est classique.

$0 < \varepsilon < 1$, $C^\varepsilon(T^n)$ $(= \mathrm{Lip}_\varepsilon(T^n))$, ce sont les fonctions höldériennes d'exposant ε, soit

$$|\varphi|_\varepsilon = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\varepsilon} < +\infty \quad .$$

Si r est non entier, la C^r-topologie est la $C^{[r]}$-topologie plus la topologie induite par la semi-norme $|\ |_{r-[r]}$ sur les dérivées r-ièmes.

Soit $C^r(T^n, \mathbb{R}^n) \cong (C^r(T^n))^n$.

Si r est entier et $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, $D^r\varphi \in E$ est la différentielle d'ordre r de φ avec $D^0\varphi = \varphi$ et aussi $D\varphi = D^1\varphi$; on a défini

$$E = C^0(T^n, \mathcal{L}_s((\mathbb{R}^n)^r, \mathbb{R}^n))$$

où $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n)^r, \mathbb{R}^n)$ est l'espace des formes multilinéaires symétriques à r variables.

La norme $|x|$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sup_i |x_i|$, induit sur $\mathcal{L}_s((\mathbb{R}^n)^r, \mathbb{R}^n)$ une norme que nous noterons encore $|\ |$.

Soit, pour $0 \le r \le \omega$, r entier, ou $r = +\infty$ ou ω, $D^r(T^n)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$ des f qui s'écrivent $\mathrm{Id} + \varphi$ avec $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ ($r = 0$, on convient que $D^0(T^n)$ est le groupe des homéomorphismes qui s'écrivent $\mathrm{Id} + \varphi$).

Si $r \ge 1$ est non entier, on suppose $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ et $f \in D^{[r]}(T^n)$ dans la définition de D^r.

On montre facilement que $D^r(T^n)$ est un groupe. Pour r entier, $0 \le r \le \omega$, $D^r(T^n)$ est un groupe topologique ; pour r non entier, $r \ge 1$, $D^r(T^n)$ n'est pas un groupe topologique. Ceci résulte de la remarque suivante :

♦ $0 \le r \le \omega$ veut dire soit $r = 0$, soit $r \ge 1$, $r \in \mathbb{R}^+$, soit $r = +\infty$, soit $r = \omega$, $\omega = \mathbb{R}$ analytique.

Remarque :

1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = 0 \qquad \text{si } x \leq 0 \text{ et } x \geq 2$$
$$\varphi(x) = \sqrt{x} \qquad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$
$$\varphi(x) = -x + 2 \qquad 1 \leq x \leq 2 \quad ,$$

$\varphi \in \mathrm{Lip}_{1/2}(\mathbb{R})$.
Mais si $\varepsilon \to 0$, $|\varphi \circ R_\varepsilon - \varphi|_{1/2}$ ne tend pas vers 0, avec $R_\varepsilon : x \to x + \varepsilon$.

2) Si $0 < \varepsilon < 1$, soit
$C^{\varepsilon+}(T^n) = \{\varphi \in C^r(T^n) \mid |\varphi(x) - \varphi(y)| = O(|x - y|^\varepsilon) \text{ si } |x - y| \to 0\}$. $C^{\varepsilon+}(T^n)$ est un sous-espace fermé pour la C^ε-topologie. Soit de même $D^{r+}(T^n)$.
Si $r \geq 1$, r non entier, $D^{r+}(T^n)$ est un groupe topologique pour la C^r-topologie.
On définit $R_\alpha : x \to x + \alpha$. Soit $C = \{R_p \mid p \in \mathbb{Z}^n\} \cong \mathbb{Z}^n$. C est le centre de $D^r(T^n)$. $D^r(T^n)/C$ est le groupe des difféomorphismes C^r de T^n, homotopes à l'Id comme applications : $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$.
Si $n = 1$, $D^r(T^1)$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ pour la C^r-topologie (et c'est toujours le revêtement $\mathbb{Z}^n$-cyclique associé à l'injection scindée $\pi_1(T^n) \to \pi_1(\mathrm{Diff}_o^r(T^n))$.
Pour $0 \leq r \leq \omega$, $D^r(T^n)$ est localement contractile pour la C^r-topologie et, si $n \geq 6$, il est non connexe.
On désigne par $D_+^r(T^n)$ la composante connexe de l'Id dans la C^r-topologie (i.e. les difféomorphismes C^r-isotopes à l'Id). Il est équivalent de conjuguer f à un $R_\alpha \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ dans $\mathrm{Diff}_o^k(T^n)$ et de conjuguer un élément de f à $D^r(T^n)$ à un R_α dans $D^k(T^n)$ et, si f est voisin de R_α, en fait nous aurons des conjugaisons C^1 voisines de l'Id qui seront donc dans $D_+^r(T^n)$, (et qui seront même voisines de l'Id de 1/8 (i.e. $|Dg - 1|_o \leq 1/8$)).
On définit $D^r(T^n, 0) = \{f \in D^r(T^n) \mid f(0) = 0\}$.
Le lecteur vérifiera que toutes nos conjugaisons sont en fait dans $D_+^r(T^n, 0)$.

2. ENONCE DU THEOREME.

Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, et $\| \ \|$ la métrique standard sur T^1 : si $x \in T^1$, $\|x\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{x} + p|$, où $\tilde{x}$ est un relèvement de x à $\mathbb{R}$. On pose, si $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\langle k, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \quad \text{et} \quad |k| = \sup_i |k_i|$$

(c'est la norme ℓ^∞).

2.1 Définition : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *satisfait une condition diophantienne s'il existe* $\beta \geq 0$ *et* $C_\beta > 0$ *tels que, pour tout* $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}} \quad .$$

Cas n = 1. - On peut réécrire 2.1 : il existe $\beta \geq 0$ et $C_\beta > 0$ tels que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\beta}{q^{2+\beta}} \quad .$$

- Pour presque tout $\alpha \in [01]$, on a α de type Roth (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ (C_ε dépendant de α et de ε) tel que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}} \quad).$$

En effet, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\alpha}{q^2 (\mathrm{Log}\ q)^2} \quad .$$

Définition : $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *est de type constant s'il existe* $C > 0$, *tel que pour tout* $p/q \in \mathbb{Q}$, *on a*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^2} \quad .$$

Par exemple les nombres algébriques de degré 2.

2.2 Théorème : *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *satisfaisant la condition diophantienne* :

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}} \quad .$$

Soit $\theta = n + \beta$ *si* $\beta \neq 0$, β *non entier*

$\theta = n + \varepsilon + \beta$ *si* $\beta = 0$ *ou* β *entier, avec* ε *arbitraire* > 0.

Alors, pour chaque choix de θ, *il existe un voisinage* $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ *dans la* $C^{2\theta}$*-topologie de* R_α *dans* $D^{2\theta}(T^1)$ *(i.e.* $V^{2\theta}_\alpha = \{f \in D^{2\theta}(T^n) \mid |f - R_\alpha|_{C^{2\theta}} \leq \mu\}$) *et une application*

$$s : V^{2\theta}_{R_\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times D^\theta_+(T^n, 0) \quad ,$$

qui possède les propriétés suivantes :

- *Si* $r \geq 2\theta$, $r - \theta$ *non entier*,

$$s : V^{2\theta}_{R_\alpha} \cap D^r(T^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times D^{r-\theta}_+(T^n, 0) \quad ;$$

- On a $\qquad s : V_{R_\alpha}^{2\theta} \cap D^k(T^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times D_+^k(T^n,0)$

pour $k = +\infty$ ou ω.

- s est continue de l'espace de départ avec la topologie C^r dans l'espace d'arrivée avec la $C^{r-\theta-\varepsilon}$-topologie, pour tout $\varepsilon > 0$.
- Si $s(f) = (\lambda, g)$,

$$\boxed{f = R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \quad .}$$

Cas $n = 1$ T^1. Si on impose que $g \in D^1(T^1,0) = \{h \in D^1(T^1) \mid h(0) = 0\}$, la décomposition $f = R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$ est unique (voir II.3.3 et III.4.1.1). De plus, si le nombre de rotation de f, $\rho(f) = \alpha$, alors $\lambda = 0$ par III.4.1.1, soit $f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$.

2.3 Corollaire : Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$, vérifiant, si $p/q \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V_{R_\alpha}^{2+2\varepsilon}$ dans la $C^{2+2\varepsilon}$-topologie de R_α tel que, si $f \in V_{R_\alpha}^{2+2\varepsilon} \cap D^r(T^1)$, $r \geq 2 + 2\varepsilon$, et $\rho(f) = \alpha$, alors f est C^{r-2}-conjugué à R_α, (en fait f est $C^{r-(1+\varepsilon)}$-conjugué à R_α pour tout $\varepsilon > 0$) ; de plus, si f est C^∞ (resp. C^ω), alors f est C^∞ (resp. C^ω)-conjugué à R_α.

2.4 Remarques :

1) Soit α satisfaisant une condition diophantienne avec $\beta > n$ non entier fixé et $C_\beta > C > 0$.

Soit l'ouvert $V_{R_\alpha}^{2(n+\beta)} = \{f \in D^{2(n+\beta)}(T^n) \mid |f - R_\alpha|_{C^{2(n+\beta)}} < \mu\}$ du théorème 2.3. Alors, pour β fixé et $C_\beta > C$, μ ne dépend que de C et de β, et non de α. De plus μ diminue si C diminue.

2) Le fait qu'on a sur T^1, pour presque tout α au sens de la mesure de Lebesgue et pour tout $\varepsilon > 0$, un voisinage dans la $C^{2+2\varepsilon}$-topologie semble optimal pour la méthode :

a) pour tout $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ non de type constant, il existe un difféomorphisme f de classe C^2 avec $\rho(f) = \alpha$, f C^2-proche de R_α et f non C^1-conjugué à R_α (voir XII.4.3).

b) pour les nombres de type constant, le problème posé par a) est ouvert ; et même l'équation linéarisée pose un problème (voir 8.2.3).

Pour les nombres de type constant, on est obligé de supposer $\theta = 1 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La première raison est la remarque 4.3.5.3; la seconde, la proposition 6.1.2 qui ne donnerait qu'une conjugaison smooth au sens de Zygmund. De plus on suppose $\theta > 1$, en 7.A.a et 7.A.c.

c) Un autre fait est le suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe un $f \in \mathrm{Diff}_+^{2-\varepsilon}(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha$, $C^{2-\varepsilon}$ proche de R_α, tel que il existe un cantor $K \subset T^1$ invariant par f (i.e. $f(K) = K$)), f n'est donc pas C^0-conjugué (voir X.3.9). En fait, il semble qu'une topologie plus raisonnable est la C^1-topologie plus variation bornée sur la dérivée ; mais pour cette topologie l'analyse de Fourier ne me paraît pas simple.

3. PRELIMINAIRES SUR LES FONCTIONS $\mathbb{R}$-ANALYTIQUES ($= C^\omega$).

On suppose dans la suite que $n \geq 1$ est un entier pour T^n fixé, toutes les constantes dépendent de n et nous ne le répèterons pas.

3.1 Notations

Soit $\mathbb{C}^n$ la complexifiée de $\mathbb{R}^n$

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n = (\mathbb{R} + i\mathbb{R})^n \quad .$$

On écrit $z_j = x_j + iy_j$, $i = \sqrt{-1}$, avec $\mathrm{Im}z = (\mathrm{Im}z_1, \ldots, \mathrm{Im}z_n)$ et $\mathrm{Re}z = (\mathrm{Re}z_1, \ldots, \mathrm{Re}z_n)$.
Sur $\mathbb{C}^n$ on a la norme

$$|z| = \sup_j |z_j|$$

avec, si $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$,

$$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2 \quad .$$

3.2 Définition de C_h^ω.

Cette norme induit une norme sur $\mathcal{L}_s((\mathbb{C}^n)^p, \mathbb{C}^n)$, espace des applications $\mathbb{C}$-multilinéaires symétriques, norme que l'on note encore $|\ |$.
Soient la bande $B_h = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |\mathrm{Im}z| \leq h\}$ et $C_h^\omega(T^n, \mathbb{R}^n) \equiv C_h^\omega$ = l'espace de Banach des fonctions $f : B_h \to \mathbb{C}^n$ continues sur B_h, holomorphes sur l'intérieur de B_h, et satisfaisant aux identités

$$f \circ R_p = f \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{Z}^n$$

$$f \circ \sigma = \sigma \circ f \quad , \text{ où } \sigma \text{ est l'involution de conjugaison de } \mathbb{C}^n.$$

On a la norme

$$|\varphi|_h = \sup_{z\in B_h} |\varphi(z)| \quad ♦ \quad .$$

Remarque : C^ω_h est seulement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3.3 Définition de $C^\omega_{h,q}$.
On pose, pour $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 0$,

$$C^\omega_{h,q}(T^n,\mathbb{R}^n) = C^\omega_{h,q} = \{f \in C^\omega_h(T^n,\mathbb{R}^n) \,|\, D^q f \in C^\omega_h(T^n,E)\}$$

où $E = \mathcal{L}_s((\mathbb{C}^n)^q,\mathbb{C}^n)$.
(Il serait plus exact de dire que $D^q f$ est holomorphe sur Int B_h et se prolonge en une fonction continue sur B_h.)
On définit la semi-norme

$$|\varphi|_{h,q} = \sup_{z\in B_h} |D^q\varphi(z)| \quad ,$$

(on convient que $|\varphi|_h = |\varphi|_{h,0}$).

3.4 Fonction C^ω.
Soit $\varphi \in C^\omega(T^n,\mathbb{R}^n)$; il existe $h > 0$ tel que φ se prolonge par complexification en une fonction encore notée φ dans $C^\omega_h(T^n,\mathbb{R}^n) = C^\omega_h$ (et même dans $C^\omega_{h,q}(T^n,\mathbb{R}^n)$); on a donc

$$C^\omega(T^n,\mathbb{R}^n) = \lim_{h\to 0} \text{ind } C^\omega_h \quad (T^n,\mathbb{R}^n) = \bigcup_{h>0} C^\omega_h \quad .$$

3.5 Coefficients de Fourier.
3.5.1 Lemme : Si $\varphi \in C^\omega_h$ et $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose

$$\hat{\varphi}(k) = \int_{T^n} e^{-2\pi i\langle k,x\rangle} \varphi(x)\,dx \quad ,$$

alors

3.5.2 $$|\hat{\varphi}(k)| \leq |\varphi|_h \, e^{-2\pi|k|_1 h}$$

où l'on pose $|k|_1 = \Sigma_i |k_i|$ ♦♦.

♦ Ne pas confondre la norme des $C^\varepsilon(T^n)$ et $|\varphi|_h$ des C^ω_h.

♦♦ $|\ |_1$ est la norme de ℓ^1 en dualité par $\langle\ \rangle$ avec celle de ℓ^∞.

De plus, si on pose

$$R_N(\varphi) = \sum_{|k|\geq N} \hat{\varphi}(k)\, e^{2\pi i\langle k,z\rangle} ,$$

alors, pour tout $h_1 < h$, on a

3.5.3 $$|R_N(\varphi)|_{h_1} \leq C_1 \frac{|\varphi|_h}{(h-h_1)^n} e^{-2\pi(N+1)(h-h_1)}$$

où C_1 est une constante.

Démonstration : Pour voir 3.5.1, comme φ est holomorphe sur B_{h_1}, pour tout $h_1 < h$, en intégrant sur un domaine fondamental sur les plans $z = (\pm ih_1,\ldots,\pm ih_1)$ et en utilisant la formule de Cauchy on a

$$|\hat{\varphi}(k)| \leq |\varphi|_h\, e^{-2\pi|k|_1 h_1} .$$

Comme c'est vrai pour tout $h_1 < h$, on a 3.5.1.
Pour voir 3.5.2. Si $h_1 < h$, on pose $\delta = h - h_1$. On a, pour $|Imz| \leq h_1$,

$$|R_N(\varphi)|_{h_1} \leq |\varphi|_h \sum_{|k|\geq N} e^{-2\pi\delta|k|_1} .$$

En comparant cette somme à l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$, on trouve, puisque

$$\int_{|x|\geq N+1} e^{-2\pi\delta|x|_1}\, dx \leq \text{constante}\, \frac{1}{\delta^n} e^{-2\pi(N+1)\delta} ,$$

$$|R_N(\varphi)|_{h_1} \leq C\, |\varphi|_h\, e^{-2\pi(N+1)(h-h_1)} \Big/ (h-h_1)^n .$$

3.6 Remarque : Soient $|\hat{\varphi}(k)| \leq C\, e^{-2\pi|k|_1 h}$, $\hat{\varphi}(-k) = \overline{\hat{\varphi}(k)}$ et $\varphi = \sum_k \hat{\varphi}(k) e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$; alors, pour tout $h_1 < h$, $\varphi \in C^\omega_{h_1}$.

3.7 Définition de $D^\omega_{h,q}$.
Soit q un entier, $q \geq 0$, et

$$D^\omega_{h,q}(T^n) \equiv D^\omega_{h,q} = \{f = Id + \varphi \in D^\omega(T^n) \,|\, \varphi \in C^\omega_{h,q}(T^n,\mathbb{R}^n)\} .$$

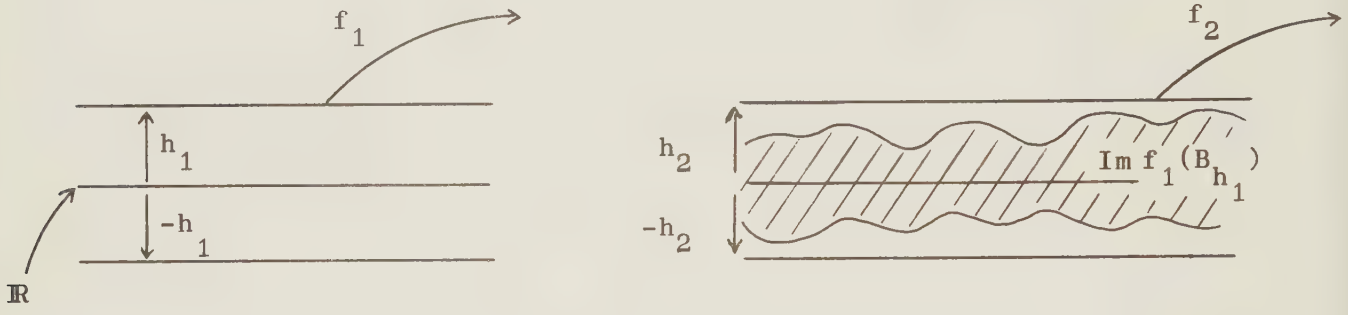
On convient que $D^\omega_h = D^\omega_{h,0}$. On note

$$|f|_{h,q} = \sup_{|Imz|\leq h} |D^q(z+\varphi(z))| .$$

3.8 Composition.

En un sens évident, $D^\omega(T^n)$ est la limite inductive des $D^\omega_{h,q}$, mais $D^\omega_{h,q}$ n'est par un groupe. Nous nous proposons de voir comment composer les éléments de $D^\omega_{h,q}$.

Si $f_1 \in D^\omega_{h_1,q}$ et $f_2 \in D^\omega_{h_2,q}$, pour $f_2 \circ f_1 \in D^\omega_{h_1,q}$, il faut que l'Image par f_1 de $\{|\mathrm{Im} z| \le h_1\}$ soit contenue dans le domaine de f_2, soit $\{|\mathrm{Im} z| \le h_2\}$.



On a les lemmes suivants :

3.8.1 Lemme 1 : Si $f \in D^\omega_{h,q}$ et $R_\alpha(z) = z + \alpha$, alors $f \circ R_\alpha \in D^\omega_{h,q}$.

Démonstration : R_α laisse invariant B_h. ■

Lemme 2 : Supposons que $f \in D^\omega_{h,0}$. Si $\nu \le h/2$ et $g \in D^\omega_{\nu,1}$, avec $|Dg|_\nu < 2$, alors $f \circ g \in D^\omega_{\nu,1}$.

Démonstration : Comme $\mathrm{Im}\, g(\mathrm{Re}(z)) = 0$, $\mathrm{Im}\, g(z) = \mathrm{Im}\, g(z) - \mathrm{Im}\, g(\mathrm{Re}(z))$. D'où par le théorème de moyenne,

$$|\mathrm{Im}\, g(z)|_\nu < 2|z - \mathrm{Re}(z)| < 2\nu \le h .$$

g envoie donc B_ν dans $\mathrm{Int}(B_h)$; il s'ensuit que $f \circ g \in D^\omega_{\nu,1}$. ■

Le lemme qui suit dit que $g \to f \circ g$ est C^1 au sens évident.

Lemme 3 : Soit $f \in D^\omega_{h,2}$ avec $|D^2 f|_h \le C$. Si $\nu \le h/2$ et $g \in D^\omega_{\nu,1}$, et si $\Delta g \in C^\omega_{\nu,1}$ avec $|g|_{\nu,1} < 1+1/2$ et $|\Delta g|_{\nu,1} < 1/2$, alors

$$|f \circ (g + \Delta g) - f \circ g - (Df \circ g)\Delta g|_\nu \le C|\Delta g|^2_\nu .$$

Démonstration : Par le lemme 2. Si $0 \le t \le 1$, alors pour tout $z \in B_\nu$, $g(z) + t\Delta g(z) \in \text{Int } B_h$. On a

$$f(g(z) + \Delta g(z)) - f(g(z)) - Df \circ g(z)\ \Delta g(z) =$$
$$= \int_0^1 (1-t) D^2 f(g(z) + t\Delta g(z))(\Delta g(z))^2 dt \quad ,$$

d'où il résulte que

$$|f \circ (g + \Delta g) - f \circ g - Df \circ g . \Delta g|_\nu \le C |\Delta g|_\nu^2 \quad . \quad \blacksquare$$

Lemme 4 : Si $U_\nu = \{g \in D^\omega_{\nu,1} \mid |D^1 f|_\nu < 2\}$, si $\nu \le h/2$, la composition $U_\nu \times C^\omega_{h,0} \to C^\omega_{\nu,1}$ est continue (i.e. $(g,f) \to f \circ g$ est continue).

Démonstration : Classique et élémentaire.

3.9 Rappelons l'inégalité de Cauchy.

Lemme : Il existe des constantes C_r, $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 1$, telles que, pour tout $f \in C^\omega_{h_1}$, si $h < h_1$, on ait

$$|D^r f|_h \le C_r\ |f|_{h_1} \Big/ (h_1 - h)^r \quad .$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer en tout $z_o \in B_h$ l'inégalité de Cauchy sur le polycylindre $|z - z_o| \le (h_1 - h)/2$ qui est strictement contenu dans B_h. $\blacksquare$

3.10 Soit la semi-norme, si $0 < \beta < 1$,

$$|\varphi|_{h,\beta} = \sup_{z_1 \ne z_2} |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \Big/ |z_1 - z_2|^\beta \text{ pour } z_1 \text{ et } z_2 \in B_h \ .$$

Lemme : Il existe des constantes $C_{r+\beta}$, avec r entier et $0 < \beta < 1$, telles que, pour tout $f \in C^\omega_{h_1}$ et tout $h < h_1$, on ait

$$|D^r f|_{h,\beta} \le C_{r+\beta}\ |f|_{h_1} \Big/ (h_1 - h)^{r+\beta} \quad .$$

Démonstration : Cela résulte de l'inégalité de Cauchy 3.9 et de l'inégalité de convexité IX.2.2.1. $\blacksquare$

4. L'EQUATION LINEARISEE.

Si on regarde $g \to g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, l'équation linéarisée en l'Id est

$$\varphi \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n) \to L_\alpha(\varphi) \in [C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n)]$$

avec $L_\alpha(\varphi) = \varphi - \varphi \circ R_\alpha$

et $[C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n)] = \{\varphi \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n) \mid [\varphi] = \int_{T^n} \varphi(x)\,dx = \vec{0}\}$.

Si on se donne η, $[\eta] = 0$, on cherche ξ tel que $\xi - \xi \circ R_\alpha = \eta$. Si on écrit les développements en séries de Fourier,

$$\xi = \sum_k \hat{\xi}(k) e^{2\pi i \langle k,x\rangle} \quad , \quad \eta = \sum_{k\neq 0} \hat{\eta}(k) e^{2\pi i \langle k,x\rangle} \ ,$$

on a

$$\xi - \xi \circ R_\alpha = \sum_k (1 - e^{2\pi i \langle k,\alpha\rangle})\ \hat{\xi}(k)\ e^{2\pi i \langle k,x\rangle} = \sum_k \hat{\eta}(k) e^{2\pi i \langle k,x\rangle} \quad .$$

Si R_α est une translation ergodique sur T^n, pour tout $k \neq 0$, on a $1 - e^{2\pi i \langle k,\alpha\rangle} \neq 0$. D'où

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\eta}(k)/(1 - e^{2\pi i \langle k,\alpha\rangle}) \quad .$$

Soit $G_\alpha = \sum_{k\neq 0} \dfrac{1}{1 - e^{2\pi i \langle k,\alpha\rangle}}\ e^{2\pi i \langle k,x\rangle}$. C'est une distribution formelle (i.e. dans le dual des polynômes trigonométriques) et formellement on a

$$\sum_{k\neq 0} \hat{\xi}(k) e^{2\pi i \langle k,x\rangle} = G_\alpha * \eta \quad .$$

C'est ici qu'intervient la condition diophantienne par α : il existe $\beta \geq 0$ et $C_\beta > 0$ tels que, pour $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$,

$$\|\langle k,\alpha\rangle\| \geq C_\beta / |k|^{n+\beta} \quad .$$

Alors (et en fait seulement alors) G_α est une distribution (i.e. un élément du dual de $C^\infty(T^n)$).

Soit $\theta = n + \beta$ si $\beta > 0$

$\theta = n + \varepsilon$ si $\beta = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ la constante K de la proposition suivante dépend de ε.

Cette proposition montre que l'opérateur de convolution G_α est en un certain sens d'ordre θ, et l'opérateur L_α^{-1} est un "inverse non borné".

4.1 Proposition : Soit $h_1 \leq 1$. Il existe une application linéaire $L_\alpha^{-1} : [C^\omega_{h_1}] \to \bigcup_{h<h_1} C^\omega_h$ (donc un inverse non borné de L_α), telle que si $h < h_1$, pour $\eta \in [C^\omega_{h_1}]$, si on pose $\xi = L_\alpha^{-1}(\eta)$, alors

$$\xi - \xi \circ R_\alpha = \eta$$

$$\xi(0) = 0 \quad ;$$

et de plus, on a l'inégalité

$$|L_\alpha^{-1}(\eta)|_h \leq K|\eta|_{h_1} \Big/ |h - h_1|^\theta \quad .$$

K dépend seulement de β, de C_β et du choix de θ (β et θ étant fixés, si C_β diminue, K croît).

Démonstration : On cherche ξ par les coefficients de Fourier

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\eta}(k)/(1-e^{2\pi i<k,\alpha>}) \quad .$$

On choisit $\hat{\xi}(0)$ de sorte que $\xi(0) = 0$. On a bien $\hat{\xi}(-k) = \overline{\hat{\xi}(k)}$.

Etude de la convergence de $\sum_{k\neq 0} \hat{\eta}(k)/1 - e^{2\pi i<k,\alpha>}$.

Il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que

$$C_1\|<k,\alpha>\| \leq |e^{2\pi i<k,\alpha>} - 1| \leq C_2\|<k,\alpha>\| \quad .$$

On a, par 3.5,

$$|\hat{\eta}(k)| \leq |\eta|_{h_1} e^{-2\pi|k|_1 h_1} \quad .$$

On a donc, pour $|\mathrm{Im} z| = h < h_1$ et si on pose $\delta = h_1 - h$,

$$\Big|\sum_{k\neq 0} \hat{\xi}(k)\, e^{2\pi i<k,z>}\Big|_h \leq |\eta|_{h_1} \quad \frac{1}{C_1} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\|<k,\alpha>\|} e^{-2\pi|k|_1\delta} \quad .$$

Par Rüssmann [2, § 9], si $\beta > 0$, il existe une constante K_β ne dépendant que de β et de C_β, (pour β fixé, K_β croît si C_β diminue) telle que

$$\frac{1}{C_1} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\|<k,\alpha>\|} e^{-2\pi|k|_1\delta} \leq K_\beta \frac{1}{\delta^{n+\beta}} \quad .$$

Soit

$$|\xi|_h \leq 2K_\beta \, |\eta|_{h_1} \Big/ (h_1 - h)^\theta \quad , \quad K = 2K_\beta \quad ,$$

avec $\theta = n + \beta$.
Le facteur 2 vient du choix de $\xi(0) = 0$. K_β étant une constante dépendant seulement de α par β et C_β et du choix de θ.

On a bien alors, par la remarque 3.6, que $\xi \in C^\omega_h$ pour tout $h < h_1$ et que

L_α^{-1} est continue $\quad [C^\omega_{h_1}] \to C^\omega_{h_2}$ si $h_2 < h_1$

et

$L_\alpha \circ L_\alpha^{-1} = \mathrm{Id}$. (i.e. $\xi - \xi \circ R_\alpha = \eta$, si $\xi = L_\alpha^{-1}(\eta)$.) ■

4.2 Remarque : La convergence de $S = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\|\langle k, \alpha \rangle\|} e^{-2\pi\delta |k|_1}$ résulte de la condition diophantienne; on a

$$\frac{1}{\|\langle k, \alpha \rangle\|} \leq \frac{1}{C_\beta} \, |k|^{n+\beta} \quad ,$$

et

$$S \leq \frac{1}{C_\beta} \sum_{k \neq 0} |k|^\beta \, e^{-2\pi |k|_1 \delta} \quad .$$

En comparant à l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ (on note $|x|_1 = \sum_i |x_i|$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta+n} \, e^{-2\pi |x|_1 \delta} \, dx \quad ,$$

on obtient (seulement)

$$\sum \frac{1}{\|\langle k, \alpha \rangle\|} e^{-2\pi |k|_1 \delta} \leq \frac{C^{te}}{C_\beta} \frac{1}{\delta^{2n+\beta}} \quad .$$

4.3 Cas où $n = 1$ sur T^1.

Nous allons démontrer que l'on peut choisir $\theta = 1 + \beta'$ pour tout $\beta' > \beta$. Mais le résultat, bien que plus faible que celui de Rüssmann, est différent. C'est d'ailleurs suffisant pour le corollaire 2.3. On a besoin des lemmes suivant :

4.3.1 Lemme : Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et Φ une fonction positive (> 0) monotone non décroissante, telle que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait $|\alpha - p/q| \geq 1/q^2 \Phi(q)$. Alors il existe une constante universelle telle que

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\|p\alpha\|} < C \, n \, \mathrm{Log} \, n \, \Phi(2n) \quad .$$

Démonstration : (D'après Kuipers et Niederreiter [1] ;voir des mêmes auteurs chap. 2 exercice 3.10, p. 131), on a $0 \le p < q \le n$, $p\alpha \pm q\alpha = (p \pm q)\alpha \bmod 1$. Donc

$$\|(p \pm q)\alpha\| \ge \frac{1}{(p \pm q)\Phi(p \pm q)} \ge \frac{1}{2n\Phi(2n)} ,$$

donc

$$\big|\, \|p\alpha\| - \|q\alpha\| \,\big| \ge \frac{1}{2n\Phi(2n)} .$$

Si on considère les intervalles pour $1 \le j \le n+1$, $\left[\frac{j}{2n\Phi(2n)} , \frac{j+1}{2n\Phi(2n)}\right[$, il y a au plus un point $\|p\alpha\|$, $1 \le p \le n$, dans l'intervalle et aucun dans $\left[0, \frac{1}{2n\Phi 2n}\right[$. On a donc

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\|p\alpha\|} \le 2n\Phi(n) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \le C\, n\, \Phi(2n)\, \mathrm{Log}\, n . \quad \blacksquare$$

4.3.2 Lemme 2 : Soit α avec $\beta > 0$, $C > 0$, tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait $|\alpha - p/q| \ge C/q^{2+\beta}$; pour tout $\beta' > \beta$, on a

$$\sum_{|n| \ne 0} \frac{1}{|n|^{1+\beta'}} \frac{1}{\|n\alpha\|} < +\infty .$$

Démonstration : Soit $\beta < \beta'' < \beta'$. On a

$$S_n(\alpha) = \sum_{|p|=1}^{n} \frac{1}{\|p\alpha\|} = O(n^{1+\beta''})$$

d'après le lemme 1 ; le O dépend de β'' et de α. Appliquons la règle de sommation d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\beta'}\|n\alpha\|} \le \sum_{n=1}^{N-1} \left(\left| \frac{1}{(n+1)^{1+\beta'}} - \frac{1}{n^{\beta'+1}} \right| S_n \right) + \frac{1}{N^{\beta'+1}} S_N$$

$$\le O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta'-\beta''}} \right) < +\infty . \quad \blacksquare$$

4.3.3 Lemme 3 : Soient α et $\delta > 0$, et $C > 0$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ on ait:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge \frac{C}{q^2 (\mathrm{Log}\, q)^{1+\delta}} .$$

Pour tout $\delta' > \delta$, on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\mathrm{Log}\, n)^{3+\delta'}} \frac{1}{\|n\alpha\|} < +\infty .$$

Démonstration : Idem que pour le lemme 2. $\blacksquare$

Remarque : Pour $\delta > 0$, pour presque tout α, pour la mesure de Haar sur T^1, il existe $C_\alpha > 0$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C_\alpha}{q^2 (\text{Log } q)^{1+\delta}} \quad .$$

4.3.4 Proposition : Soit α, avec $\beta > 0$ et $C_\beta > 0$, tel que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C_\beta}{q^{2+\beta}} \quad .$$

Alors, pour tout $\beta' > \beta$, on a :

$$\sum_{|n| \neq 0} \frac{e^{-2\pi|n|\delta}}{\|n\alpha\|} \leq K \frac{1}{\delta^{1+\beta'}} \quad .$$

Démonstration : Soit $C = \max_{x \in \mathbb{R}} (|x|^{\beta'+1} e^{-2\pi|x|})$. C dépend de β'. On a

$$e^{-2\pi|n|\delta} \leq \frac{C}{\delta^{1+\beta'} |n|^{1+\beta'}} \quad ,$$

donc

$$\sum_{|n| \neq 0} \frac{1}{\|n\alpha\|} e^{-2\pi|n|\delta} \leq \frac{C}{\delta^{1+\beta'}} \left(\sum_{|n| \neq 0} \frac{1}{|n|^{1+\beta'} \|n\alpha\|} \right)$$

$$K = C \left(\sum_{|n| \neq 0} \frac{1}{|n|^{1+\beta'} \|n\alpha\|} \right) = O(1) \quad . \quad \blacksquare$$

4.3.5 Remarques :

1) Dans la proposition précédente, si β' et β sont fixés, la constante K ne dépend que de $C_\beta > 0$, et $K \to \infty$ si $C_\beta \to 0$.

2) Le lemme 3 laisse supposer que pour presque tout nombre α au sens de la mesure de Lebesgue, il faut peut être remplacer le module de continuité hölderien par des modules de continuité de forme $\delta(\text{Log } \delta)^p$, p entier.

3) Si α est de type constant, on ne sait pas (et on ne peut probablement pas) supprimer le terme Log n dans le lemme 4.3.2.
Ceci nous amène à considérer un α de type constant comme un nombre tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait $|\alpha - p/q| \geq C_\varepsilon / q^{2+\varepsilon}$.

4) La proposition 4.3.4 est suffisante pour le corollaire de 2.3.

5. LE THEOREME D'ARNOLD.

5.1 Introduction. Notations U_h, V_ν^i, W_ν.

Soient les ensembles

$$U_h = \{f \in D^\omega_{h,2} \mid |D^2 f_h| \leq 2\} \text{ , et,}$$

pour $i = 1,2$,

$$V_\nu^i = \mathbb{R}^n \times \{g \in D^\omega_{\nu,1} \mid |D\, g - Id|_\nu \leq \frac{1}{4i}\} \text{ et}$$

$$W_\nu = \mathbb{R}^n \times \{\varphi \in C^\omega_\nu \mid |D\, \varphi|_\nu \leq \frac{1}{8}\} \text{ .}$$

On suppose que $\nu \leq h/2$ est donné.
Soit $f \in U_h$, considérons l'application qui à $\psi = (\lambda, g)$ associe $F(f,\psi) = f \circ g - g \circ R_\alpha + \lambda \in C^\omega_{h,1}$. F est bien définie sur V^1_ν, continue, et même C^∞ (on est dans des Banach) par 3.8.,lemmes 2 à 4.
f étant donné, on cherche ψ_f telle que

$$F(f,\psi_f) = f \circ g_f - g_f \circ R_\alpha + \lambda_f = 0 \text{ ,}$$

soit, si $g \in D^\omega(T^n)$, $\qquad f = R_{\lambda_f} \circ g_f \circ R_\alpha \circ g_f^{-1}$.

5.2 Enoncé du théorème d'Arnold.

On suppose que $h \leq 1$.

On a le théorème d'Arnold (et J. Moser [1]) :

Théorème : Soit α satisfaisant une condition diophantienne, et choisissons θ comme en 4.1.
Soient $f_o \in U_h$, $\psi_o = (\lambda_o, g_o) \in V^2_{h/2}$ (i.e. $|D\, g_o - Id|_{h/2} \leq 1/8$) tels que l'on ait :

$$F(f_o,\psi_o) = f_o \circ g_o - g_o \circ R_\alpha + \lambda_o = 0 \text{ .}$$

Il existe deux constantes ε_o et C dépendant seulement de α et du choix de θ, (en fait pour β fixé et θ aussi, ε_o diminue si C_β diminue), telles que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$ et si $f \in U_h$ vérifie

$$|f - f_o|_h = \varepsilon h^{2\theta} \text{ ,}$$

alors il existe $\Delta\psi = (\Delta\lambda, \Delta g) \in \mathbb{R}^n \times C^{\omega}_{h/4,1}$ tel que

$$0 = F(f, \psi_o + \Delta\psi) = f_o \circ (g_o + \Delta g) - (g_o + \Delta g) \circ R_\alpha + \lambda_o + \Delta\lambda \quad ,$$

avec les inégalités

$$|\Delta\psi|_{h/4} \leq C\ \varepsilon\ h^{\theta} = C\ \frac{|f - f_o|_h}{h^{\theta}}$$

$$|\Delta\psi|_{h/4,1} \leq C\ \varepsilon\ h^{\theta-1} \quad .$$

De plus, la correspondance $(f_o, \psi_o, f) \to \Delta\psi$ est continue de $\{f \in U_h \mid |f - f_o|_{h,0} \leq \varepsilon_o\ h^{2\theta}\}$ dans $\mathbb{R}^n \times C^{\omega}_{h/4,1}$.

Remarque : On a bien $g = g_o + \Delta g \in D^{\omega}_{h/4}$, puisqu'on aura $|g - Id|_{h/4,1} \leq 1/4$.

La démonstration de ce théorème se fera en quatre points :

A) Principe
B) Inversion de la différentielle à un terme quadratique près, par un opérateur non borné.
C) Démonstration.
D) Unicité locale.

A) Principe (d'après H. Rüssmann [1]) : méthode de Newton.

Soient E, G, H des espaces de Banach, de normes notées $|\ |$.
Soit $F : E \times G \to H$ de classe C^2. On se donne $(f_o, \psi_o) \in E \times F$ vérifiant $F(f_o, \psi_o) = 0$.
On suppose que sur un voisinage de $(f_o, \psi_o) \in E \times G$ il existe une application continue $(f, \psi) \to L(f, \psi) \in \mathcal{L}(H, G)$ telle que si $dF(f, \psi)$ est la dérivée de $\psi \to F(f, \psi)$ (f fixé), alors on a, pour tout $\Delta h \in H$,

$$|dF(f,\psi) \circ L(f,\psi)\Delta h - \Delta h| = O(|F(f,\psi)|\ |\Delta h|)$$

(i.e. L est un inverse de $dF(f,\psi)$ à un "terme quadratique près").
Noter que si $0 = F(f,\psi)$, alors $L(f,\psi)$ est un vrai inverse de $dF(f,\psi)$.
Alors, f étant voisin de f_o, il existe ψ_f tel que $F(f, \psi_f) = 0$. Evidemment, ceci résulte du théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach. Nous allons donner un procédé d'itération qui converge quadratiquement (i.e. comme ε^{2^n}, $0 < \varepsilon < 1$) vers une solution ψ_f.

Pour ψ_o on a $|F(f,\psi_o)| = O(|f - f_o|)$.
Pour $i \geq 1$, posons par récurrence sur i, $\psi_i = \psi_{i-1} + \Delta\psi_{i-1}$ avec $\Delta\psi_{i-1} = -L(f,\psi_{i-1}).F(f,\psi_{i-1})$.
Ce procédé converge quadratiquement : en effet, d'après la formule de Taylor,

$$F(f,\psi_i) = F(f,\psi_{i-1} + \Delta\psi_{i-1}) = F(f,\psi_{i-1}) + dF(f,\psi_{i-1})\Delta\psi_{i-1} + O(|\Delta\psi_{i-1}|^2)$$

soit $$|F(f,\psi_i)| = O(|F(f,\psi_{i-1}).\Delta\psi_{i-1}|) + O(|\Delta\psi_{i-1}|^2) \quad .$$

Or, on a $$|\Delta\psi_{i-1}| = O(|F(f,\psi_{i-1})|)$$

et donc $$|F(f,\psi_i)| = O(|F(f,\psi_{i-1})|^2) \quad ,$$

ce qui assure la convergence quadratique.
On procèdera en C) ainsi : il existe ε_o tel que si $|f - f_o| = \varepsilon \leq \varepsilon_o$, alors on a par récurrence pour $i \geq 2$

$$|F(f,\psi_{i-1})| \leq \varepsilon\, 2^{-i}$$

et

$$|\Delta\psi_{i-1}| \leq \varepsilon\, 2^{-i} \quad .$$

Remarque :

- Le fait de diminuer les bandes de convergence analytique peut s'interpréter comme l'application d'opérateurs de lissage.
- Les petits dénominateurs (i.e. L_α a un inverse L_α^{-1} non borné) pourront être compensés par la convergence quadratique : elle permet en diminuant les bandes de convergence de contrôler la divergence due aux petits dénominateurs.

B) Inversion de la différentielle de $\psi \to F(f,\psi)$ par un opérateur non borné et inégalités.

Notations : On suppose que $f \in U_h$ (i.e. $|D^2 f|_h < 2$) et on se donne $\nu_o \leq h/2$ et $\psi = (\lambda, g)$. Alors $F(f,\psi) = f \circ g - g \circ R_\alpha + \lambda \in C^\omega_{\nu_o,1}$. Si $\Delta\psi \in W_{\nu_o}$, on a par 3.8 lemme 3, $dF(f,\psi)$ désignant la dérivée de $\psi \to F(f,\psi)$ (f fixé),

B.1 $$|F(f,\psi + \Delta\psi) - F(f,\psi) - dF(f,\psi).\Delta\psi|_{\nu_o} \leq 2|\Delta\psi|^2_{\nu_o}$$

avec, si $\Delta\psi = (\Delta\lambda, \Delta g) \in \mathbb{R}^n \times C^\omega_{\nu_o,1}$,

B.2 $$dF(f,\psi).\Delta\psi = Df \circ g.\Delta g - \Delta g \circ R_\alpha + \Delta\lambda \quad .$$

On cherche à inverser $dF(f,\psi)$.

Inversion de $dF(f,\psi)$ à un terme quadratique près (inverse non borné) d'après Rüssmann [1].
Soient $\nu \leq \nu_o$ et Δg; on définit $E \in C^\omega_\nu$ par

B.3 $$\Delta g = Dg.E \quad .$$

On a $$dF(f,\psi).\Delta\psi = Df \circ g.Dg.E - Dg \circ R_\alpha.E \circ R_\alpha + \Delta\lambda \ .$$

Si on dérive par rapport à z, $F(f,\psi)(z) = (f \circ g - g \circ R_\alpha)(z) + \lambda$, on a

$$D_z F(f,\psi)(z) = (Df \circ g\ Dg - Dg \circ R_\alpha)(z)$$

donc $$D_z F(f,\psi).E = D(f \circ g).E - (Dg \circ R_\alpha).E \quad .$$

Il en résulte que

B.4 $$dF(f,\psi)\Delta g - D_z F(f,\psi).E = Dg \circ R_\alpha(E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda \quad .$$

B.5 Inversion de $E \to Dg \circ R_\alpha.(E - E \circ R_\alpha) = Dg \circ R_\alpha.(L_\alpha.E)$ avec $L_\alpha : E \to E - E \circ R_\alpha$.
Puisque $|Dg \circ R_\alpha - Id|_{\nu_o} \leq 1/4$ et puisque $(\lambda,g) \in V^1_{\nu_o}$, $Dg \circ R_\alpha$ est une fonction matricielle inversible, soit A la matrice inverse, $A \in C^\omega_{\nu_o}(B_{\nu_o}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$.
On a

B.6 $$|A|_{\nu_o} \leq 1 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad |A - Id|_{\nu_o} \leq \frac{1}{3}$$

(par la formule $|(Id - B)^{-1} - Id| \leq |B| \,/\, 1 - |B|$ vraie pour une algèbre de Banach).
Pour résoudre, si on se donne $\eta \in C^\omega_{\nu_o}$, $Dg \circ R_\alpha(E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda = \eta$, on a à résoudre

B.7 $$E - E \circ R_\alpha + A.(\Delta\lambda) = A.\eta \quad .$$

Or on sait le faire par 4.1.
Soit [A] la matrice $[A] = \int_{T^n} A(x)dx$. On a

B.8 $$|[A] - Id| \leq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad |[A]^{-1} - Id| \leq \frac{1}{2} \ .$$

On a nécessairement, en intégrant sur T^n,

$$[A.\Delta\lambda] \equiv [A].\Delta\lambda = [A\eta] \ .$$

Soit

B.9 $$\Delta\lambda = [A]^{-1}[A\eta]$$

et

B.10 $$|\Delta\lambda| \leq C \ |\eta|_{\nu_o}$$

avec $C \leq (1 + 1/3)(1 + 1/2)$ par B.6 et B.8.
Puis on a à résoudre

$$L_\alpha(E) = E - E \circ R_\alpha = A.(\eta - \Delta\lambda) \ .$$

On a bien

$$[A](\eta - \Delta\lambda) = 0$$

par le choix B.9 de $\Delta\lambda$. Donc par 4.1

B.11 $$E = L_\alpha^{-1}(A.(\eta - \Delta\lambda))$$

avec, pour tout $\nu < \nu_o$, $E \in C^w_\nu$ et si $\nu < \nu_o$,

B.12 $$|E|_\nu \leq C_3 \frac{|\eta|_{\nu_o}}{|\nu_o - \nu|^\theta} \ ,$$

C_3 étant une constante dépendant de α et θ.

L'opérateur $L(f,\psi)$ est inverse de $dF(f,\psi)$ à un terme quadratique (et non borné) près.
Il est donné par B.3, B.9 et B.11 :

B.13 $$\eta \to L(f,\psi)\eta = (\Delta\lambda = [A]^{-1}[A.\eta], Dg.L_\alpha^{-1}.A.(\eta - \Delta\lambda)) \ .$$

On a $$|Dg|_{\nu_o} \leq 1 + \frac{1}{4}$$

et si $\eta \in C^\omega_{\nu_o}$, pour tout $\nu < \nu_o$, on a

$$L(f,\psi).\eta \in \mathbb{R}^n \times C^\omega_\nu$$

(puisque Dg et $Dg \circ R_\alpha$ sont holomorphes sur $\operatorname{Int} B_\nu$ et par B.11). Remarquons que $L(f,\psi)$ est non borné puisque L_α^{-1} l'est.

On a, si $L(f,\psi)\eta = \Delta\psi$,

B.14 $$dF(f,\psi)\Delta\psi - \eta - D_z F(f,\psi).E = 0 \quad .$$

B.15 Si $\nu < \nu_o \leq h/4$ est fixé, l'application qui à (ψ,f) associe $L(f,\psi)$ est continue de $U_h \times V^1_\nu$ dans $\mathcal{L}(C^\omega_{\nu_o}, \mathbb{R}^n \times C^\omega_\nu)$.

Remarque : $|\ |_\nu$ (resp. $|\ |_{\nu,1}$) est la semi-norme sur $\mathbb{R}^n \times C^\omega_\nu$ (resp. $\mathbb{R}^n \times C^\omega_{\nu,1}$) donnée, si $\psi = (\lambda, g)$, par

$$|\psi|_\nu = \sup(|\lambda|, |g|_\nu) \quad (\text{resp. } |\psi|_{\nu,1} = |g|_{\nu,1}) \quad .$$

Majoration de l'opérateur $L(f,\psi)$.

On a des constantes C_4, C_5 dépendant seulement de α et du choix de θ telles que, si $\eta \in C^\omega_{\nu_o}$ et si $\nu < \nu_o$, par B.9, B.12, B.6 et par l'inégalité 4.1, on ait

B.16 $$|L(f,\psi)\eta|_\nu \leq C_4 \frac{|\eta|_{\nu_o}}{(\nu_o - \nu)^\theta}$$

et

B.17 $$|L(f,\psi)\eta|_{\nu,1} \leq C_5 \frac{|\eta|_{\nu_o}}{(\nu_o - \nu)^{\theta+1}} \quad .$$

Pour voir B.17, on a, pour $\nu < \nu_o$ par B.16,

$$|L(f,\Psi).\eta|_{\nu+(\nu_o-\nu)/2} \leq 2^\theta C_4 \frac{|\eta|_{\nu_o}}{(\nu_o - \nu)^\theta} \quad ,$$

puis on applique l'inégalité de Cauchy entre ν et $(\nu_o-\nu)/2 + \nu$.

Remarque : Si $F(f,\psi) = 0$, alors $L(f,\psi)$ est un inverse (non borné) de $F(f,\psi)$.

Inégalités fondamentales.

Soient $f \in U_h$, $\nu_o \leq h/2$ et $\psi \in V^1_{\nu_o}$ (i.e. $|D\psi - Id|_{\nu_o} < 1/4$), alors $F(f,\psi) \in C^\omega_{\nu_o}$,

B.18 $$\Delta\psi = -L(f,\psi).F(f,\psi) \quad ;$$

alors $\Delta\psi \in C^\omega_{\nu,1}$ pour tout $\nu < \nu_o$. On a, par B.16 et B.17,

B.19 $$|\Delta\psi|_{\nu} \leq C_2 \frac{|F(f,\psi)|_{\nu_o}}{(\nu_o - \nu)^{\theta}}$$

et

B.20 $$|\Delta\psi|_{\nu,1} \leq C_2 \frac{|F(f,\psi)|_{\nu_o}}{(\nu_o - \nu)^{\theta+1}} \quad ;$$

C_2 est une constante dépendant seulement de α et θ et du fait que $\psi \in V^1_{\nu_o}$. De plus $(f,\psi) \to \Delta\psi_{\nu_1} \in C^{\omega}_{\nu_1,1}$ est continue pour ν_1 fixé, $\nu_1 < \nu$.

B.21 On a, si $\Delta\psi \in W_{\nu_1}$ $(\nu_1 < \nu_o)$ (i.e. $|D^1\Delta\psi|_{\nu_1} \leq 1/8$), d'après B.1, B.2 et B.14,

$$|F(f,\psi+\Delta\psi)|_{\nu_1} \leq C_6 |D_z F(f,\psi)|_{\nu_1} |\Delta\psi|_{\nu_1} + 2|\Delta\psi|^2_{\nu_1} \quad .$$

Si on applique l'inégalité de Cauchy à $D_z F(f,\psi)$, on a finalement

B.22 $$|F(f,\psi+\Delta\psi)|_{\nu_1} \leq C_1 \frac{|F(f,\psi)|_{\nu_o}}{(\nu_o - \nu)} |\Delta\psi|_{\nu_1} + 2|\Delta\psi|^2_{\nu_1} \quad ,$$

avec C_1 constante dépendant seulement de α et θ et de ce que $\psi \in V^1_{\nu_o}$ et $\Delta\psi \in W_{\nu_1}$.

C) Démonstration du théorème d'Arnold.

C.1 Rappelons que $h \leq 1$ et que $\theta \geq 1$, donc $h^{\theta-1} \leq 1$.
Si $\delta_n = h/2(1/2 + 1/2^{n+1})$, on a $\delta_n - \delta_{n+1} = h/2^{n+3}$.
Soit ψ_o sur $B_{\delta_o} = B_{h/2}$, et $F(f,\psi_o) \in C^{\omega}_{\delta_o,1}$. On définit

$$\Delta\psi_o = -L(f,\psi_o)F(f,\psi_o) \text{ sur } B_{\delta_1}$$

et on pose $$\psi_1 = \psi_o + \Delta\psi_o \quad .$$

C.2 Récurrence sur $n \geq 1$. On va choisir ε_o tel que, si $|f - f_o|_h \leq \varepsilon\, h^{2\theta} \leq \varepsilon_o\, h^{2\theta}$, on ait par récurrence, si $n \geq 1$ et $s = \theta + 2$,

1_n) $\psi_n \in V^1_{\delta_n}$ (i.e. $|D\psi_n - Id|_{\delta_n} \leq 1/4$) ;

2_n) $|F(f,\psi_n)|_{\delta_n} \leq \varepsilon\, h^{2\theta}\, 2^{-(n+5)s}$;

3_n) Si l'on définit $\Delta\psi_n = -L(f,\psi_n).F(f,\psi_n)$, on a $\Delta\psi_n \in W_{\delta_{n+1}}$ (i.e. $|\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+1}} \leq 1/8$) .

$4_n)$ $\quad |\Delta\psi_n|_{\delta_{n+1}} \leq \varepsilon\, h^{\theta}\, 2^{-(n+5)s}$;

$5_n)$ $\quad |\Delta\psi_n|_{\delta_{n+1},1} \leq \varepsilon\, h^{\theta-1}\, 2^{-(n+5)s}$.

On définit alors

$$\boxed{\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta\psi_n \text{ sur } B_{\delta_{n+1}} .}$$

Démonstration de C.2.

Pour n = 0, on a

$2_o)$ $\quad |F(f,\psi_o)|_{\delta_o} = |F(f,\psi_o) - F(f_o,\psi_o)|_{\delta_o} \leq \varepsilon\, h^{2\theta}$.

Par B.19 et B.20, on a

$4_o)$ $\quad |\Delta\psi_o|_{\delta_1} \leq C_2\, 2^{3\theta}\, \varepsilon\, h^{\theta}$;

$5_o)$ $\quad |\Delta\psi_o|_{\delta_1,1} \leq C_2\, 2^{3(\theta+1)}\, \varepsilon\, h^{\theta-1}$.

On choisit ε_o tel que $C_2\, 2^{3(\theta+1)}\, \varepsilon_o \leq 1/8$.

Montrons d'abord que n implique n+1 pour $n \geq 2$.

- Montrons que $1_{n+1})\ \psi_{n+1} \in V^1_{\delta_{n+1}}$.

Si $5_i)$ sont vraies pour $i \leq n$, on aura

$$\psi_{n+1} = \psi_o + \sum_{i=0}^{n} \Delta\psi_n$$

$$|\sum_{i=0}^{n} \Delta\psi_n|_{\delta_{n+1},1} \leq \sum_{i=0}^{n} |\Delta\psi_i|_{\delta_{i+1},1} \leq \varepsilon_o\, h^{\theta-1}\, A \leq \varepsilon_o\, A$$

avec $A = C_2\, 2^{3(\theta+1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(i+5)s}}$.

[a] Choisissons ε_o tel que $\varepsilon_o\, A \leq 1/8$. Puisqu'on a $|\psi_o - Id|_{h/2,1} \leq 1/8$, ($\psi_o \in V^2_{h/4}$ par hypothèse), et que $1/8 + 1/8 = 1/4$, on a bien $|\psi_{n+1} - Id|_{\delta_{n+1},1} \leq 1/4$.

- Démonstration de $2_{n+1})$, $4_{n+1})$ et $5_{n+1})$.

On a par B.22,

$$|F(f,\psi_{n+1})|_{\delta_{n+1}} \leq C_1\, \frac{|F(f,\psi)|_{\delta_n}}{(\delta_n - \delta_{n+1})}\, |\Delta\psi_n|_{\delta_{n+1}} + 2\, |\Delta\psi_n|^2_{\delta_{n+1}} ;$$

en supposant $4_n)$ vrai, on a

$$|F(f,\psi_{n+1})|_{\delta_{n+1}} \le C_1 \varepsilon^2 h^{4\theta-\theta-1} 2^{-2(n+5)s+(n+3)} + 2\varepsilon^2 h^{4\theta-2\theta} 2^{-2(n+5)s}$$

$$= \varepsilon^2 (C_1 h^{\theta-1} + 2\, 2^{-(n+3)}) h^{2\theta} 2^{-2(n+5)s+(n+3)} .$$

On pose $B = C_1 + 2$. On a

$$|F(f,\psi_{n+1})|_{\delta_{n+1}} \le \varepsilon B \varepsilon h^{2\theta} 2^{-2(n+5)s+(n+3)} .$$

Puisque $\Delta\psi_{n+1} = -L(f,\psi_n).F(f,\psi_{n+1})$, on a donc par B.18 et B.19

4_{n+1}) $\quad |\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+2}} \le \varepsilon^2 B C_2 h^{\theta} 2^{-2(n+5)s+(n+3)+(n+4)\theta}$

et

5_{n+1}) $\quad |\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+2},1} \le \varepsilon^2 B C_2 h^{\theta-1} 2^{-2(n+5)s+(n+3)+(n+4)(\theta+1)}$

[b] On choisit ε_o tel que $\varepsilon_o B C_2 \le 1$ et $\varepsilon_o B \le 1$. Puisque $s = \theta+2$, on a bien

$$2^{-2(n+5)s+(n+3)+(n+4)(\theta+1)} \le 2^{-((n+1)+5)s} .$$

2_{n+1}), 4_{n+1}) et 5_{n+1}) sont alors vraies.

• Démontrons 3_{n+1}).
Soit $\Delta\psi_{n+1}|_{\delta_{n+2}} \in W_{\delta_{n+2}}$.

[c] Pour $n = 0$, il suffit de choisir ε_o tel que $2^{3(\theta+1)} \varepsilon_o C_2 \le 1/8$, puisqu'on a alors $|\Delta\psi_o|_{\delta_1,1} \le 2^{3(\theta+1)} \varepsilon C_2 h^{\theta-1} \le 1/8$.
On a bien alors 1_1).
Pour $n \ge 1$, $\varepsilon_o \le 1/8$, car si $n \ge 1$, 3_n) est alors une conséquence de 5_n).
En fait le choix [c] est une conséquence du choix [a].

Il reste à montrer que C.2 est vraie pour $n = 1$.

Il faut montrer 2_1, 4_1) et 5_1).
Par B.22, 2_o) et 4_o), on a

$$2_1) \quad |F(f,\psi_1)|_{\delta_1} \le \varepsilon^2 C_1 C_2 2^{3\theta+3} h^{4\theta-\theta-1} + 2\varepsilon^2 C_2^2 h^{4\theta-2\theta}$$

$$= \varepsilon^2 (h^{\theta-1} C_1 C_2 2^{3\theta+3} + 2 C_2^2) h^{2\theta} .$$

Si $C = C_1 C_2 2^{3\theta+3} + 2 C_2^2$, on a

$2_1)$ $\quad |F(f,\psi_1)|_{\delta_1} \leq \varepsilon^2 C h^{2\theta}$,

et par B.18 et B.19 on a

$4_1)$ $\quad |\Delta\psi_1|_{\delta_2} \leq C_2 C \varepsilon^2 2^{4\theta} h^{\theta}$

$5_1)$ $\quad |\Delta\psi_1|_{\delta_{2+1}} \leq C_2 C \varepsilon^2 2^{4(\theta+1)} h^{\theta-1}$.

[d] On choisit ε_o tel que $\varepsilon_o C \leq 2^{-6(\theta+2)}$ et $\varepsilon_o C C_2 2^{4(\theta+1)} \leq 2^{-6(\theta+2)}$.
Alors on a $1_1)$ à $5_1)$.
Par les choix [a], [b], [c] et [d] de ε_o on a bien démontré par récurrence que l'on a $1_n)$ à $5_n)$ pour tout $n \geq 1$. ■

C.3 Démonstration du théorème d'Arnold.

On a alors, si $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, par $4_n)$ et $5_n)$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\psi_i|_{\delta_{n+1}} \leq \varepsilon h^{\theta} A$$

et $$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\psi_i|_{\delta_{n+1},1} \leq A \varepsilon h^{\theta-1} ,$$

avec $A = C_2 2^{3\theta+3} + \sum_{1}^{\infty} 1/2^{-(i+5)s}$.

$\Delta\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta\psi_i$ converge bien par 3.8., lemme 4, dans l'espace de Banach $C^{\omega}_{h/4,1}$
et on a par passage à la limite de $2_n)$

$$F(f,\psi_o + \Delta\psi) = 0$$

On a de même

$$|\Delta\psi|_{h/4} \leq \varepsilon C h^{\theta}$$

et $$|\Delta\psi|_{h/4,1} \leq \varepsilon C h^{\theta-1}$$

avec $C = A$.
La correspondance $(f_o,\psi_o,f) \to \Delta\psi$ est continue puisque limite uniforme d'applications continues. ■

D) Unicité locale.

L'unicité locale que nous allons démontrer est facile pour le cas de T^1.

Si $R_{\lambda_1} \circ g_1 \circ R_\alpha \circ g_1^{-1} = R_{\lambda_2} \circ g_2 \circ R_\alpha \circ g_2^{-1}$, avec $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $g_i \in D^0(T^1,0)$ pour $i = 1,2$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$ et $g_1 = g_2$ (voir II.33 et III.4.1.1).

On a, pour $n \geq 2$, la proposition

Proposition : Soient α et θ comme dans le théorème d'Arnold. Il existe ε indépendant de h, tel que, si $f \in U_h$, $\psi_i \in V^1_{h/4}$ pour $i = 1,2$, avec $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $\psi_i = (\lambda_i, g_i)$, et si $|\psi_1 - \psi_2|_{h/4} \leq \varepsilon\, h^\theta$ et $F(f,\psi_1) = F(f,\psi_2) = 0$ (i.e. $R_{\lambda_1} \circ g_1 \circ R_\alpha \circ g_1^{-1} = f = R_{\lambda_2} \circ g_2 \circ R_\alpha \circ g_2^{-1}$), alors $\psi_1 = \psi_2$ (i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$ et $g_1 = g_2$).

Démonstration : Puisque $f \circ g_1 - g_1 \circ R_\alpha + \lambda_1 = 0$, si l'on pose $\Delta\psi = (\Delta\lambda, Dg_1 E)$, on a par B.3

$$dF_f(\psi_1)\Delta\psi = Dg_1 \circ R_\alpha (E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda \quad .$$

Remarquons que $dF(f,\psi_1)$ est injective si on impose que $\Delta g(0) = 0$. En effet on a alors $E(0) = 0$. $dF(f,\psi_1)\Delta\psi = 0$ implique que

$$Dg_1 \circ R_\alpha (E - E \circ R_\alpha) + \Delta\lambda = 0 \quad .$$

Avec la même notation qu'en B), on a $[A]\Delta\lambda = 0$, soit $\Delta\lambda = 0$, donc $E - E \circ R_\alpha = 0$; comme R_α est sur T^n une translation ergodique, E = constante, et, puisque $E(0) = 0$, $E \equiv 0$; d'où il résulte que $\Delta\psi = 0$.

$dF_f(\psi_1)$ a pour inverse L.

On a donc une constante C_4 indépendante de ν et de h telle que, si $\nu < \nu_0 \leq h/4$, on ait par B.16, (C_4 est la même constante),

D.1 $$|\Delta\psi|_\nu = |L.dF(f,\psi_1)\Delta\psi|_\nu \leq C_4 \frac{|dF(f,\psi_1)\Delta\psi|_{\nu_0}}{|\nu_0 - \nu|^\theta} \quad .$$

Ecrivons

$$0 = F(f,\psi_1) - F(f,\psi_2) \quad .$$

en utilisant la formule de Taylor 3.8, lemme 3, on a

$$0 = dF(f,\psi_1)\Delta\psi + M(\Delta\psi)^2$$

avec $M(x)(\Delta\psi(x))^2 = \int_0^1 (1-t)D^2 f(\psi_1(x) + t\ \Delta\psi(x))(\Delta\psi)^2(x)dt$.

Par D.1 on a

$$\frac{1}{C_4}(\nu_o - \nu)^\theta |\Delta\psi|_\nu \leq 2\ |\Delta\psi|^2_{\nu_o} \quad .$$

Choisissons $\delta_n = \frac{h}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Remarquons qu'on a toujours $\psi_1 \in V^1_{\delta_n}$. On a

$$|\Delta\psi|_{\delta_1} \leq 2\ C_4 \frac{|\Delta\psi|^2_{h/4}}{(\delta_o - \delta_1)^\theta} \quad ,$$

puisque $|\Delta\psi|_{h/4} \leq \varepsilon\ h^\theta$.

On a, si ε est assez petit (indépendant de h et dépendant de α et θ),

$$|\Delta\psi|_{\delta_1} \leq \varepsilon\ h^\theta\ 2^{-\theta}$$

et, par une récurrence élémentaire, si ε est assez petit, $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, on a

$$|\Delta\psi|_{\delta_n} \leq \varepsilon\ h^\theta\ 2^{-n\theta} \quad .$$

Soit, si $n \to +\infty$,

$$|\Delta\psi|_{h/8} = 0 \quad ,$$

ce qui implique $\Delta\psi = 0$. ∎

6. RAPPELS SUR LES APPROXIMATIONS DES FONCTIONS C^r.

Ce paragraphe est classique et est dû essentiellement à S. Bernstein et Jackson.

Soit $r \in \mathbb{R}_+$, on rappelle que $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^r et $\mathbb{Z}^n$-périodiques. (Si r est entier, ce sont les fonctions r fois continuement dérivables, si r est non entier, ce sont les fonctions $C^{[r]}$ dont la dérivée est $Lip_{r-[r]}(T^n, \mathbb{R}^n)$ ou encore hölderienne de rapport r-[r]).

$|\ |_{C^r}$ est une norme définissant la topologie C^r. Plus précisément, si $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$,

$$|\varphi|_{C^r} = \sum_{0 \leq k \leq [r]} |D^k\varphi|_o + |D^{[r]}\varphi|_{r-[r]}$$

avec, si $0 < r < 1$,

$$|\varphi|_r = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^r} \quad .$$

Rappelons la proposition d'approximation de J. Moser [1, Lemma 1, p. 528-9].

6.1 Proposition : 1) Il existe une constante $C(r)$ dépendant de r et de n telle que, pour tout $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$, il existe une suite $\varphi_i \in C^\omega_{1/2^i}(T^n, \mathbb{R}^n)$ (en fait les φ_i sont des polynômes trigonométriques de degré $\leq 2^i$)♦ telle que

$$|\varphi_i - \varphi_{i-1}|_{1/2^i} \leq C(r) \frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{ir}} \quad ,$$

que $\varphi_o = 0$, et que $\varphi_i \to \varphi$ dans la C^o-topologie quand $i \to +\infty$.

2) Réciproquement, soit $0 < h \leq 1$ donné, soit une suite $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i \in C^\omega_{h/2^i}$ (i entier ≥ 0) avec

$$|\varphi_i - \varphi_{i-1}|_{h/2^i} \leq \frac{K}{2^{ir}} \quad ,$$

alors, si r est non entier : φ_i converge dans la $C^{[r]}$-topologie sur $\mathbb{R}^n$ (ou T^n) vers $\varphi \in C^{[r]}(T^n, \mathbb{R}^n)$ et même $\varphi \in C^{r-\varepsilon}(T^n, \mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Complément : De plus, d'après Jacobowitz, $\varphi \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ et φ_i converge dans la $C^{r-\varepsilon}$-topologie pour tout $\varepsilon > 0$ (mais en général pas dans la C^r-topologie), et si r est entier, $r \neq 0$, alors φ est "C^{r-1} plus smooth au sens de Zygmund".

Démonstration : 2) résulte de l'inégalité de Cauchy (3.9 et 3.10); pour la convergence, voir VIII.2.7.3 ; pour les suppléments, nous renvoyons à Jacobowitz [1, § 5, p. 205-209].

Esquisse de la démonstration de 1) : Il suffit de le voir pour $\varphi \in C^r(T^n)$. Soit A une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, à support dans $\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x|_1 = \sum_i |x_i| \leq 1\}$, égale à 1 sur $\{x \mid |x|_1 \leq 3/4\}$ et vérifiant $A(-x) = A(x)$.

♦ Le degré de $e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$ ($i = \sqrt{-1}$) est $|k|_1 = \sum_j |k_j|$.

Soit $\hat{A} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la transformée de Fourier de A,

$$\hat{A}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} A(x) e^{-2\pi i \langle \lambda, x \rangle} \, dx \quad .$$

D'après la formule d'inversion de Fourier, si P est polynôme à n variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{A}(x) P(x) dx = P(0) \quad .$$

Si $\varphi \in C^o(T^n)$, soit $t > 0$,

$$\varphi_t(x) = t^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{A}(t(x-y)) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{A}(y) \varphi(x - \frac{y}{t}) dy$$

on pose $$\varphi_j = \varphi_t \big|_{t=2^\gamma} \quad .$$

D'après la formule d'inversion de Fourier,

si $$\psi(x) = e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$$

$$\psi_t(x) = A(-\frac{k}{t}) \, e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$$

et si $$\left| \frac{k}{t} \right|_1 \geq 1 \quad ,$$

alors $$A(-\frac{k}{t}) = 0 \quad .$$

On montre alors facilement que pour tout $\varphi \in C^o(T^n)$, φ_j est un polynôme trigonométrique de degré $\leq 2^j$.
De plus, si $\varphi \in C^r(T^n)$,

$$|\varphi_j - \varphi|_{C^o} \leq C_1(r) \frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{jr}} \quad ,$$

avec $C_1(r)$ constante indépendante de φ et dépendant de r et de A, voir Sapiro [1, chap. IV].
Pour voir que

$$|\varphi_j - \varphi_{j-1}|_{1/2} \leq C(r) \frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{jr}} \quad ,$$

avec C(r) constante dépendant seulement de r et de A, je renvoie à J. Moser [1, p. 528-529], ou Jacobowitz [1, p. 205-209].

6.2 Cas $\varphi \in C_h^{\omega}(T^n, \mathbb{R}^n)$.

Proposition : *Soient les* φ_j *construits en 6.1, pour* $\varphi \in C_h^{\omega}$, *si j est tel que* $1/2^j \leq h/2$, *alors il existe une constante* $C(\varphi)$ *dépendant de* φ *et de* h *telle que*

$$|\varphi - \varphi_j|_{1/2^j} \leq C(\varphi)\ e^{-2\pi\ 2^j\ h/8} \quad .$$

Démonstration : En effet, par 3.5.3, on a

$$|R_{2^j+1}(\varphi)|_{h/2} \leq C_1\ e^{-2\pi\ 2^j\ h/2} \quad ,$$

C_1 étant une constante dépendant de φ. Si

$$\varphi = \sum_k \hat{\varphi}(k)\ e^{2\pi i \langle k,x\rangle}$$

$$R_{N+1}(\varphi) = \sum_{|k| \geq 2^j+1} \hat{\varphi}(k)\ e^{2\pi i \langle k,x\rangle}$$

avec $|k| = \sup_j |k_j|$, il suffit de comparer

$$S_{2^j}(\varphi) = \sum_{|k| \leq 2^j} \hat{\varphi}(k)\ e^{2\pi i \langle k,x\rangle}$$

à φ_j. On a

$$|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2} \leq |\varphi|_h \sum_{0 \leq |k| \leq 2^j} \left(1 - A\left(\frac{k}{2^j}\right)\right) e^{-2\pi\ |k|_1\ h/2} \quad .$$

Or $A(k/2^j) = 1$ si $|k/2^j|_1 \leq 3/4$, donc

$$|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2} \leq |\varphi|_h\ \ \mathrm{card}\{k/\ \frac{2^j.3}{4} \leq |k| \leq 2^j\}\ \ e^{-2\pi\ 2^j.3/4\ h/2}$$

$$\leq |\varphi|_h\ 2^{j(n+1)}\ e^{-2\pi\ 2^j.3/8} \quad .$$

Soit $C = \mathrm{Max}_{x \geq 0}\ (x^{n+1}\ e^{-2\pi x})$. On a donc

$$N^{n+1} \leq C\ \frac{e^{2\pi\delta N}}{\delta^{n+1}} \quad ,$$

donc

$$|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2} \leq C\ |\varphi|_h\ e^{-2\pi(3/8\ h - \delta)2^j} \Big/ \delta^{n+1} .$$

On choisit $\delta = 2\ h/8$. On a bien

$$|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2} \leq C_2(\varphi)\ e^{-2\pi\ 2^j\ h/8}$$

et on conclut que

$$|\varphi - \varphi_j|_{h/2} \leq C(\varphi)\ e^{-2\pi\ 2^j\ h/8} \quad . \quad \blacksquare$$

6.3 Remarque : Soit K un compact métrisable, soit $t \in K \to \varphi(t) \in C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$ une application continue, alors pour i fixé, on voit facilement que

$$t \to \varphi_i(t) \in C^o(T^n, \mathbb{R}^n) \text{ est continue (si } \varphi_i(t) = [\varphi(t)]_i),$$

et que

$$|\varphi(t) - \varphi_i(t)|_{C^o} \leq C_1(r) \sup_i \frac{|\varphi(t)|_{C^r}}{2^{ir}} \quad .$$

Pour i fixé, $t \to (\varphi_i - \varphi_{i-1})(t)$ est continue dans $C^\omega_{1/2^i}(T^n, \mathbb{R}^n)$, puisque ce sont des polynômes trigonométriques de degré $\leq 2^i$ et

$$\sup_{t \in K} |\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)|_{1/2^i} \leq C(r) \sup_t \frac{|\varphi(t)|_{C^r}}{2^{ir}} \quad ,$$

C(r) étant une constante qui dépend seulement de r et de A.

7. DEMONSTRATION DU THEOREME DE CONJUGAISON LOCALE : LE THEOREME D'ARNOLD IMPLIQUE LE THEOREME DE CONJUGAISON LOCALE (d'après J. Moser).

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \geq 0$, $C_\beta > 0$, tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$,

$$\|\langle k, \alpha \rangle\| \geq \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}} \quad .$$

On choisit $\theta = n + \beta$ si β est non entier

$\theta > n + \beta$ si β est entier.

On a donc $\theta > 1$.

A) Nous allons déterminer un voisinage $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ de R_α dans la $C^{2\theta}$-topologie.

$$V^{2\theta}_{R_\alpha} = \{f \in D^{2\theta}(T^n) \mid |f - R_\alpha|_{C^{2\theta}} \leq \mu\} \quad ,$$

et une application $s : V^{2\theta}_{R_\alpha} \to \mathbb{R}^n \times D^\theta(T^n, 0)$ telle que si $f \in V^{2\theta}_{R_\alpha}$ et $s(f) = (\lambda, g)$

alors $$f \circ g - g \circ R_\alpha + \lambda = 0 \quad .$$

Si $f \in V_{R_\alpha}^{2\theta}$, par 6.1.1) on approxime $f - R_\alpha$ par des polynômes trigonométriques φ_i de degré $\leq 2^i$; par la proposition d'approximation 6.1, avec $\varphi_o = 0$, on a, en posant $f_i = R_\alpha + \varphi_i$,

7.1 $$|f_i - f_{i-1}|_{1/2^i} = |\varphi_i - \varphi_{i-1}| \leq C(2\theta) \frac{|f - f_o|_{C^{2\theta}}}{2^{i2\theta}} \leq C(2\theta) \frac{\mu}{2^{2\theta i}} ,$$

$C(2\theta)$ est une constante dépendant de θ, n et de A.

Nous allons choisir μ de telle sorte que l'on puisse appliquer à chaque étape le théorème d'Arnold (5.2), et on passera à la limite en appliquant 6.1.2).
Pour cela, il faut vérifier les hypothèses du théorème d'Arnold.

a) Premier choix de μ.

Soit $\nu = 1/2$. On a $f_i \in D^\omega_{\nu/2^i,2}$.

• Il faut que $f_i \in U_{\nu/2^i}$ (i.e. $|f_i|_{\nu/2^i,2} = |D^2 f_i|_{\nu/2^i} < 2$). On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy à 7.1,

$$|f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i,2} \leq C_1 \, 2^{-(2\theta-2)i} \, \mu$$

où C_1 est une constante. Par conséquent,

$$|f_i - f_o|_{\nu/2^i,2} = |\varphi_i|_{\nu/2^i,2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i,2} \leq C_1 \, \mu \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(2\theta-2)i} \right) .$$

Comme $2\theta > 2$, on choisit

$$\mu \leq 2/C_1 \left(\sum_i 2^{-(2\theta-2)i} \right) \quad .$$

On en déduit que, pour tout i, $f_i \in U_{\nu/2^i}$, que

$$|f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i} \leq C(2\theta) \, 2^{-2\theta i} \, \mu \quad .$$

b) Deuxième choix de μ.

Soit ε_o la constante du théorème d'Arnold (5.2) qui dépend de α et du choix de θ.

On suppose que μ est assez petit pour que, pour tout $i \geq 0$,

7.3 $$|f_{i+1} - f_i|_{\nu/2^{i+1}} \leq C(2\theta)\ \mu\ \frac{1}{2^{2\theta(i+1)}} \leq \varepsilon_o \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^{2\theta}$$

($\nu = 1/2$).

7.4 Récurrence.

Pour $i = 0$, $f_o = R_\alpha \in U_{1/2}$ et $g_o = Id$, $\lambda_o = 0$. On a bien

$$f_o \circ g_o - R_\alpha \circ g_o + \lambda_o = 0 \quad .$$

Soit $f_i \in U_{\nu/2^i}$, on suppose par récurrence sur i que l'on a 7.5.i) à 7.8.i).

7.8.i) $$\psi_i = (\lambda_i, g_i) \in V^2_{\nu/2^{i+2}}$$

(i.e. $|Dg_i - Id|_{\nu/2^{i+2}} \leq 1/8$), avec

7.5.i) $$f_i \circ g_i - g_i \circ R_\alpha + \lambda_i = 0$$

et de plus (C_1 étant une constante indépendante de i et de f)

7.6.i) $$|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}} \leq C_1\ \mu \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{\theta}$$

7.7.i) $$|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2},1} \leq C_1\ \mu \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{\theta-1} \quad .$$

Montrons que c'est vrai pour i+1 si l'on suppose μ assez petit. On applique le théorème d'Arnold (5.2) avec $h = \nu/2^{i+1}$, $h/2 = \nu/2^{i+2}$ et $h/4 = \nu/2^{i+3}$, $f_o = f_i$ et $f = f_{i+1}$.

On a bien que $|f_{i+1} - f_i|_\nu \leq \varepsilon_o\ h^{2\theta}$ par 7.3 et f_i et f_{i+1} sont dans U_h.

Par 7.8.i), $\psi_i \in V^2_{\nu/2^{i+2}}$, et il existe donc $\Delta\psi_i \in \mathbb{R}^n \times C^\omega_{\nu/2^{i+3},1}$ tel que, si l'on pose

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta\psi_i \quad ,$$

on ait

7.5.i+1) $$f_{i+1} \circ g_{i+1} - g_i \circ R_\alpha + \lambda_{i+1} = 0 \quad .$$

D'après 7.3,

$$|f_{i+1} - f_i|_{\nu/2^{i+1}} \leq C_2\, \mu \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^{2\theta}$$

C_2 étant une constante indépendante de i et de f.
Si C est la constante du théorème d'Arnold (indépendante de h), on a, d'après celui-ci,

7.6.i+1) $$|\psi_{i+1} - \psi_i|_{\nu/2^{i+3}} = |\Delta\psi_i|_{\nu/2^{i+3}} \leq C\, C_2 \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^{\theta}$$

7.7.i+1) $$|\psi_{i+1} - \psi_i|_{\nu/2^{i+3},1} = |\Delta\psi_i|_{\nu/2^{i+3}} \leq C\, C_2 \left(\frac{\nu}{2^{i+1}}\right)^{\theta} .$$

On choisit donc $C_1 = C\, C_2$.
Il faut s'assurer que $\psi_{i+1} \in V^2_{\nu/2^{i+3}}$.

c) Troisième choix de μ.

On a

$$|\psi_{i+1} - Id|_{\nu/2^{i+3},1} \leq \sum_{p=1}^{i+1} |\psi_p - \psi_{p-1}|_{\nu/2^{p+2},1} \leq C_1\, \mu \left(\sum_{p=0}^{i+1} \left(\frac{\nu}{2^{p+2}}\right)^{\theta-1} \right) .$$

Or, puisque $\boxed{\theta > 1}$,

$$\sum_{p=0}^{i+1} \left(\frac{\nu}{2^{p+2}}\right)^{\theta-1} < A = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{2^{p+2}}\right)^{\theta-1} < +\infty .$$

Pour s'assurer que $\psi_{i+1} \in V^2_{\nu/2^{i+3}}$, il suffit donc de choisir

$$\mu\, C_1\, A \leq 1/8 ,$$

et ceci achève la récurrence, 7.8.i+1) étant établie.
On a ainsi, par les 3 choix a), b), c), déterminé μ, et donc $V^{2\theta}_{R_\alpha}$, et μ ne dépend que du choix de θ, et (pour β fixé) de C_β ; si C_β diminue, μ diminue.

Démonstration de 7.A) : Soient $f \in V^{2\theta}_{R_\alpha}$, $f_i - R_\alpha$ déterminé par 6.6.1), et ψ_i 7.6.i) et la proposition d'approximations 6.1.2) montrent que par la proposition d'approximations 6.1.2) on a que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta\psi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i - \psi_{i-1})$$

converge dans $\mathbb{R}^n \times C^{[\theta]}(T^n, \mathbb{R}^n)$ pour la $C^{[\theta]}$-topologie vers un élément $\Delta\psi = (\Delta\lambda, \Delta g) \in \mathbb{R}^n \times C^{\theta}(T^n, \mathbb{R}^n)$ (de plus il y a convergence dans la $C^{\theta-\varepsilon}$-topo-

logie pour tout $\varepsilon > 0$). Soit

$$s(f) = (\Delta\lambda, Id + \Delta g) \quad .$$

D'après 6.1.2) (plus complément) , $g \in D^{\theta}(T^n,0)$ par passage à la limite, si $i \to +\infty$, de l'inégalité 7.8.i) et $|D^1(\Delta g)|_0 \leq 1/8$; (on a bien $\theta > 1$). Donc

$$s : V_{R_\alpha}^{2\theta} \to \mathbb{R}^n \times D^{\theta}(T^n)$$

$$f \to (\lambda, g) \quad .$$

On a par passage à la limite de l'égalité 7.5.i)

$$f \circ g - g \circ R_\alpha + \lambda = 0 \quad ,$$

soit $$\boxed{f = R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \quad .} \qquad \blacksquare$$

Remarque : Puisque $|D^1 \Delta g|_0 \leq 1/8$, g est C^1-isotope à l'Id (i.e. $g \in D_+^{\theta}(T^n,0)$).

B) Si $r \geq 2\theta$, $r - \theta$ est non entier. s envoie $V_{R_\alpha}^{2\theta} \cap D^r(T^n)$ dans $\mathbb{R}^n \times D^{r-\theta}(T^n,0$.

Démonstration : Soit $f \in V_\alpha^{2\theta} \cap D^r(T^n)$. On a, par 7.3, $|f_{i+1} - f_i|_{\nu/2^{i+1}} \leq \varepsilon_0 \left(\nu/2^{i+1}\right)^{2\theta}$. Puisque $f \in V_\alpha^{2\theta}$, mais aussi puisque f est C^r, par la proposition d'approximation 6.1.1,

$$|f_{i+1} - f_i|_{\nu/2^{i+1}} \leq C(r) \frac{|f - R_\alpha|_{C^r}}{2^{(i+1)r}}$$

où $C(r)$ est une constante dépendant seulement de r et de n. D'après 7.6.i).

$$|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}} \leq C_1 \mu \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{\theta}$$

et aussi $$|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}} \leq C \frac{|f_i - f_{i-1}|_{\nu/2^i}}{(\nu/2^i)^{\theta}}$$

par le théorème d'Arnold, soit :

$$|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}} \leq C\, C(r)\, |f - R_\alpha|_{C^r} \Big/ 2^{(i+1)r} \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^\theta \quad .$$

Il en résulte que

$$|\psi_i - \psi_{i-1}|_{\nu/2^{i+2}} \leq C(f) \left(\frac{\nu}{2^{i+2}}\right)^{r-\theta} \quad .$$

C(f) étant une constante indépendante de i, mais dépendant de f, r, θ, etc. Par 6.1.2) ($r \geq 2\theta$), $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta\psi_i$ converge vers $\Delta\psi \in \mathbb{R}^n \times C^{[r-\theta]}(T^n, \mathbb{R}^n)$ dans la $C^{[r-\theta]}$-topologie. De plus, puisque $r - \theta$ est non entier par hypothèse, on a, d'après 6.1.2) complément),

$$s(f) = (\Delta\lambda, Id + \Delta g) \in \mathbb{R}^n \times D^{r-\theta}(T^n, 0)$$

ce qui prouve que

$$s : V_{R_\alpha}^{2\theta} \cap D^r(T^n) \to \mathbb{R}^n \times D^{r-\theta}(T^n, 0) \quad . \quad \blacksquare$$

C) s envoie $V_{R_\alpha}^{2\theta} \cap D^\infty(T^n)$ dans $\mathbb{R}^n \times D^\infty(T^n)$.

Démonstration : Immédiat par B) puisque, si $f \in V_\alpha^{2\theta} \cap D^\infty(T^n)$, s(f) est $C^{r-\theta}$ pour tout r. ■

D) Continuité de s.

Démonstration : Soient $r \geq 2\theta$, $r - \theta$ non entier, K un compact de $D^r(T^n) \cap V_{R_\alpha}^{2\theta}$ et $t \in K \to f_t$ une application continue.
Puisque K est compact par 6.3, il existe $t \in K \to (f_t)_i$ dépendant continuement de f_t. Par la continuité du théorème d'Arnold 5.2, $t \in K \to \Delta\psi_i(t)$ dépend continuement de t ; remarquons, puisque K est compact, que les constantes sont uniformément majorées sur K.
$t \to \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\psi_i(t)$ converge donc uniformément en t dans la $C^{[r-\theta]}$-topologie vers $t \in K \to \Delta\psi(t)$ qui est donc continue. s est bien continue de $V_{R_\alpha}^{2\theta} \cap D^r(T^n)$ dans $\mathbb{R}^n \times D^{r-\theta}(T^n, 0)$ pour la $C^{[r-\theta]}$-topologie, car si K est une suite convergente $f_i \to f$ dans la C^r-topologie, alors $s(f_i) \to s(f)$ dans

$\mathbb{R}^n \times D^{[r-\theta]}(T^n,0)$ (et même, pour tout $\varepsilon > 0$, $f \to s(f) \in D^{r-\theta-\varepsilon}(T^1)$ est continue, d'après 6.1.1)). ∎

D) $\hat{s}$ envoie $V^{2\theta}_{R_\alpha} \cap D^\omega(T^n)$ dans $\mathbb{R}^n \times D^\omega(T^n,0)$.

Démonstration : Si $f = Id + \alpha + \varphi \in D^\omega(T^n)$, il existe, d'après 3.4 , un $h > 0$ tel que $\varphi \in C^\omega_h(T^n,\mathbb{R}^n)$. D'après 6.2 , si φ_i sont les approximations de 6.1.1, et si i est tel que $\nu/2^i \le h/2$, alors

$$|f - \varphi_i - R_\alpha|_{\nu/2^i} \le |f - \varphi_i - R_\alpha|_{h/2} \le C(f)\ e^{-2\pi 2^i h/8} ,$$

où la constante C(f) dépend de f et de h, mais non de i.
On aura, si i est assez grand

$$C(f)\ e^{-2\pi 2^i h/8} \le \varepsilon_o \left(\frac{\nu}{2^i}\right)^{2\theta}$$

puisque $C(f)\ e^{-2\pi 2^i h/8}\ 2^{i\theta}/\nu^{2\theta} \to 0$ si $i \to +\infty$; pour i assez grand, on pourra donc supposer que $f_{i+1} = f$, et par le théorème d'Arnold il existera $\Delta\psi_i \in \mathbb{R}^n \times C^\omega_{\nu/2^{i+3},1}$ tel que $\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta\psi_i = (\lambda_{i+1}, g_{i+1})$ vérifie

$$f \circ g_{i+1} - g_{i+1} \circ R_\alpha + \lambda_{i+1} = 0$$

et $(\lambda_{i+1}, g_{i+1}) \in \mathbb{R}^n \times D^\omega(T^n,0)$, en fait $g_{i+1} \in D^\omega_{\nu/2^{i+3},1}$.
Le procédé se stabilise donc. s envoie bien $V^{2\theta}_{R_\alpha} \cap D^\omega(T^n)$ dans $D^\omega(T^n,0)$ par l'injectivité 5.2.D) et par la continuité du théorème d'Arnold 5.2. Ce n'est que pour T^n $(n \ge 2)$ qu'on a besoin de l'unicité 5.2.D). ∎

8. REMARQUES SUR L'EQUATION LINEARISEE.

On suppose que $r < +\infty$ avec $r \in \mathbb{R}_+$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \ge 0$, $C_\beta > 0$, tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$,

$$\|\langle k,\alpha\rangle\| \ge \frac{C_\beta}{|k|^{n+\beta}} .$$

Soit

$$\theta = \begin{cases} n+\varepsilon & \text{si } \beta = 0 \\ n+\beta & \text{si } \beta \ne 0 \end{cases} .$$

Etant donné $\varphi \in C^r(T^n)$ vérifiant $\int_{T^n} \varphi(x)dx = 0$, on cherche ψ tel que

$$L_\alpha(\psi) = \psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi \quad .$$

Nous avons déjà discuté les cas C^∞ et C^ω en 4.
On a, pour $r < +\infty$, la

8.1 Proposition : Si $r > 0$, $\varphi \in C^r(T^n)$ et $0 = [\varphi] = \int_{T^n} \varphi(x)dx$, il existe $\psi \in C^{r-\theta}(T^n)$, (si $r - \theta$ n'est pas entier; et si $r - \theta$ est entier, ψ est $C^{r-\theta-1}$ plus smooth au sens de Zygmund), unique si l'on impose $\psi(0) = 0$ et vérifiant

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi \quad .$$

Démonstration : 6.1.1) permet d'approcher φ par des polynômes trigonométriques φ_i de degré $\leq 2^i$, avec $\varphi_o = 0$, tels que

$$|\varphi_i - \varphi_{i-1}|_{1/2^i} \leq C(r) \frac{|\varphi|_{C^r}}{2^{ir}},$$

et $\int_{T^n} (\varphi_i - \varphi_{i-1})(x)dx = 0$.
On pose $\psi_o = 0$. Soit, pour $i \geq 1$, $\Delta\psi_i \in C^\omega_{\nu/2^i}$ avec $\nu = 1/2$, déterminé par la proposition 4.1, vérifiant $L_\alpha(\Delta\psi_i) = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ (i.e. $\Delta\psi_i - \Delta\psi_i \circ R_\alpha = \varphi_i - \varphi_{i-1}$).
On a, par 4.1,

$$|\Delta\psi_i|_{\nu/2^i} \leq C(r) \; |\varphi|_{C^r} \Big/ 2^{ir} (\nu/2^i)^\theta \quad \text{et} \quad \Delta\psi_i(0) = 0 \quad ,$$

soit

$$|\Delta\psi_i|_{\nu/2^i} \leq \frac{C^{te}}{2^{i(r-\theta)}} \quad .$$

Par 6.1.2), si $r - \theta$ est non entier, $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\psi_i$ converge dans la $C^{[r-\theta]}$-topologie vers une fonction de $C^{r-\theta}(T^n)$.

Par passage à la limite, puisque $\Delta\psi_i - \Delta\psi_i \circ R_\alpha = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

et $\psi(0) = 0$.
Si $r - \theta$ est entier ($\neq 0$) , ψ est $C^{r-\theta-1}$ plus smooth au sens de

Zygmund d'après 6.1.2)(complément). ■

8.2 Cas de T^1.

On a la

8.2.1 Proposition : Soit $\varepsilon > 0$, soit $\varphi \in C^0(T^1)$, $[\varphi] = \int_{T^1} \varphi(x)dx = 0$ avec $|\hat{\varphi}(k)| = |\int_{T^1} e^{-2\pi ikx} \varphi(x)\ dx| \leq 0\ (1/|k|(\mathrm{Log}|k|)^{3+\varepsilon})$. Alors pour presque tout α (au sens de la mesure de Lebesgue), il existe $\psi \in C^0(T^1)$ (ψ est de classe A : sa série de Fourier est absolument convergente) vérifiant

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi \quad .$$

Démonstration : On a nécessairement

$$\psi = \sum_{|n|\neq 0} \frac{\hat{\varphi}(n)}{1 - e^{2\pi i n\alpha}} e^{2\pi inx}$$

et, par 4.3.3 ,

$$\sum_{|n|\neq 0} \left| \frac{\hat{\varphi}(n)}{1 - e^{2\pi i\ n\alpha}} \right| \leq 0\left(\sum_{|n|\neq 0} \frac{1}{|n|(\mathrm{Log}\ |n|)^{3+\varepsilon}} \frac{1}{\|n\alpha\|} \right)$$

$$\leq 0(1)$$

pour presque tout α (i.e., tel que, pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. il existe $C_\alpha > 0$ vérifiant, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - p/q| \geq C_\alpha / q^2(\mathrm{Log}\ q)^{1+\varepsilon'}$). ■

8.2.2 Exemples :

1) Soit $\varphi \in C^0(T^1)$ dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable et de dérivée $D\varphi$ égale, sauf un ensemble dénombrable, à une fonction à variation bornée, alors

$$|\hat{\varphi}(k)| = 0\left(\frac{1}{|k|^2}\right) .$$

C'est ce que nous avons appelé la classe P. Il y a des exemples $\varphi \in C^0(T^1)$, de classe P, et seulement PL (linéaires par morfinis sur T^1). φ n'est alors pas C^1 ! Pour les $\varphi \in C^0(T^1)$ de classe P, la proposition 8.2.1 s'applique.

2) Si α n'est pas de type constant, on peut construire des $\varphi \in C^1(T^1)$, tels que $[\varphi] = 0$ et que φ soit une série de Fourier lacunaire, mais qu'il n'existe pas de $\psi \in L^1(T^1, dx)$ vérifiant m-presque-partout $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$

(voir (XIII.4).

8.2.3 On a le :

Problème ♦ : Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de type constant. Existe-t-il $\varphi \in C^1(T^1)$, $\int_{T^1} \varphi(x)dx = 0$, tel qu'il n'existe pas de $\psi \in C^0(T^1)$ vérifiant $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$?

Remarque : Si α est de type constant et si $\varphi \in C^1(T^1)$ (et même $\varphi \in H^1(T^1,dx) = \{\sum a_k e^{2\pi ikx} \mid \sum |k|^2 |a_k|^2 < +\infty\}$) avec $\int_T \varphi(x)dx = 0$, alors il existe $\psi \in L^2(T^1,dx)$ vérifiant m-presque-partout $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$.

8.2.4 Remarque : Soit $m = dx$ la mesure de Lebesgue. Si on cherche pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ des solutions ψ m-mesurables à l'équation $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ m-presque-partout avec φ m-mesurable ; alors nécessairement par Anosov [1], on a $\int_{T^1} \varphi(x)dx = 0$.
Il se peut que $\varphi \in C^\omega(T^1)$, que $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$,

$$\sup_k \left| \frac{\hat{\varphi}(k)}{1-e^{2\pi ik\alpha}} \right| = +\infty \quad ,$$

que α soit de Liouville ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) ,
mais que l'équation

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$$

ait une solution m-mesurable ! (Pour de tels exemples, voir Anosov [1].p

---

♦ Note ajoutée en cours d'épreuve : Yves Meyer a montré que la réponse à ce problème est positive.

C H A P I T R E V I I I

CONSEQUENCES DE L'INEGALITE DE DENJOY : ERGODICITE PAR RAPPORT A LA MESURE DE HAAR ; COMMENT REVENIR PAR CONJUGAISON A UNE ROTATION.

Plan :

0. Notations.
1. m-ergodicité.
2. Comment revenir par conjugaison à une rotation.

Commentaire :

Le problème de savoir si un difféomorphisme de T^1 de classe P est ergodique par rapport à la mesure de Haar m si son nombre de rotation est irrationnel a été posé par A. Denjoy. C'est ce qu'il appelle la "transitivité forte de Birkhoff". Si j'ai bien compris, Denjoy l'avait déjà posé en 1932 dans une note aux Comptes-Rendus (voir Denjoy [4] p. 580). Denjoy pose le problème plus explicitement et clairement dans (Denjoy [4], observations et commentaires (2ème partie), p. 88).

Nous donnons une réponse partielle en 1.4 : c'est vrai si le difféomorphisme est C^2 (et même C^1 plus lipschitz) et de nombre de rotation irrationnel.

Le théorème capital pour la suite est 2.5 que nous utiliserons plusieurs fois en IX. La théorie des petits dénominateurs (i.e. VII.2) est résumée (et améliorée) en le théorème 2.8 que nous utiliserons dans IX.6.1.

Je remercie tout particulièrement Ledrappier, Strelcyn et Thouvenot pour m'avoir aussi posé le problème de la m-ergodicité.

***

0. NOTATIONS.

$m = dx$ est la mesure de Haar (ou de Lebesgue) sur T^1 (sur $\mathbb{R}$) et, dans ce chapitre, $|\ |_{L^p}$ sera la norme dans $L^p(T^1,m)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ (avec, si $1 \leq p < +\infty$, $|\varphi|_{L^p} = (\int_{T^1} |\varphi(x)|^p dx)^{1/p}$. Dans la suite, L^1 veut toujours dire $L^1(T^1,m)$.

1. m-ERGODICITE.

Soit $f : T^1 \to T^1$ un homéomorphisme m-non singulier: f et f^{-1} sont absolument continues (par exemple $f : T^1 \to T^1$ est un homéomorphisme lipschitzien ; f et f^{-1} sont des applications lipschitziennes de T^1 dans T^1 pour la métrique standard de T^1). Soit $A \subset T^1$ m-mesurable, alors $f(A)$ et $f^{-1}(A)$ sont m-mesurables et on a

$$m(f(A)) = 0 \text{ est équivalent à } m(A) = 0.$$

Définition : f est m-ergodique si, pour tout ensemble A de T^1 m-mesurable et invariant par f (i.e. $f(A) = A$ m-presque partout), on a $m(A) = 0$ ou 1.

1.2 Remarques :

- Une condition nécessaire pour qu'un homéomorphisme f de T^1, (m-non singulier), soit m-ergodique est que f soit m-incompressible.
- Une condition nécessaire est donc que $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et que f est C^0-conjugué à R_α.
- Rappelons (ainsi que nous le verrons en X.3.8) que, pour tout $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ il existe un difféomorphisme f de classe C^1, avec $\rho(f) = \alpha$, et un Cantor invariant $K \subset T^1$ avec $f(K) = K$: un tel f n'est pas m-ergodique ni même m-incompressible.
- Si $f \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f est uniquement ergodique par II.8, i.e. f a une unique mesure de probabilité invariante μ ; f est alors μ-ergodique.
- Nous verrons en XII.1.13 qu'il existe $f \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tel que $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, (h étant unique si on impose $h(0) = 0$) où h est un homéomorphisme de T^1 qui envoie un ensemble borélien de m-mesure nulle sur un ensemble de m-mesure 1 ; il suit que si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par f, μ est étrangère à la mesure

de Haar m ; la μ-ergodicité de f ne nous renseigne aucunement sur la m-ergodicité !

1.3 Soit f un homéomorphisme de classe P de T^1 avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Par exemple f est un homéomorphisme PL, ou f est C^1 et sa dérivée est à variation bornée, alors f est m-incompressible et f est C^0-conjugué à R_α.

On a le problème suivant (aussi posé par A. Denjoy [4], observations et commentaires, deuxième partie p. 88).

Problème : Est-ce que f est m-ergodique ?

La réponse partielle que nous donnerons est le

1.4 Théorème : Si $f \in \mathrm{Diff}^2_+(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f est m-ergodique.

1.5 En fait, la démonstration que nous donnerons marche sans changement pour f de classe C^1 avec Df lipschitzienne. On a alors $D^2 f \in L^\infty(T^1, m)$ et on remplace la norme $|\ |_0$ par la norme de L^∞ ainsi que le lecteur vérifiera.
Pour démontrer 1.4, nous aurons besoin des paragraphes 1.6 à 1.17.

1.6 Un outil.
Il nous semble très naturel d'introduire le théorème ergodique de W. Hurewicz [1], qui est un cas particulier du théorème ergodique de Chacon-Ornstein (voir Garsia [1]), théorème qui précisément ne suppose pas de mesure invariante (absolument continue).
Soit f un homéomorphisme de T^1 de classe P avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors f est m-incompressible, (f est aussi un homéomorphisme lipschitzien de T^1).
Considérons l'opérateur (changement de variable)

$$G : \varphi \in L^1(T^1, m) \longrightarrow G(\varphi) = \varphi \circ f . Df \in L^1(T^1, m)$$

on a $|G| = 1$ (norme dans $\mathcal{L}(L^1, L^1)$) et G est positif (i.e. si $\varphi \geq 0$, $G(\varphi) \geq 0$).
Alors considérons si $n \geq 1$

$$S_n^f(\varphi) \equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(\varphi)}{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(1)} \equiv \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i . Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \quad .$$

Par Hurewicz [1], si $n \to +\infty$, $S_n^f(\varphi)$ converge m-presque partout vers une limite $\widetilde{\varphi} \in L^1(T^1,m)$ et puisque f est m-incompressible

$$\widetilde{\varphi} \circ f = \widetilde{\varphi}$$

et on a aussi

$$\int_{T^1} \widetilde{\varphi}(x)dx = \int_{T^1} \varphi(x)dx \quad .$$

On a donc la condition nécessaire (et aussi suffisante) de m-ergodicité pour f : pour tout $\varphi \in L^1(T^1,m)$ avec $\int_{T^1} \varphi(x)dx = 0$, alors, si $n \to +\infty$, $S_n^f(\varphi) \to 0$ m-presque partout.

1.7 Une formule.

Soit $f \in D^2(T^1)$. Alors on a, pour n entier $(n \geq 1)$

$$\boxed{D^2 f^n = Df^n \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i \right)}$$

Voici une démonstration. On a

$$\text{Log } Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} (\text{Log } Df) \circ f^i \quad .$$

En dérivant les deux membres, on a

$$\frac{D^2 f^n}{Df^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i \quad ,$$

soit précisément la formule voulue. ∎

1.8 Un cas particulier du théorème de W. Hurewicz.

Le caractère "un peu mystérieux" de ce que nous allons faire disparaîtra en 2.5.

Soit $f \in \text{Diff}_+^2(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Considérons, pour $n \geq 1$,

$$S_n^f\left(\frac{D^2 f}{Df}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \quad .$$

Nous poserons

$$\psi_n = S_n^f \left(\frac{D^2 f}{Df} \right) \quad .$$

On a par le théorème ergodique de Hurewicz, si $n \to +\infty$, $\psi_n \to \psi$ m-presque partout. Comme pour tout n on a

$$|\psi_n|_o \leq \left| \frac{D^2 f}{Df} \right|_o \quad ,$$

on a $\psi \in L^\infty(T^1, m)$ et, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, si $n \to +\infty$, $\psi_n \to \psi$ m-presque partout et dans $L^1(T^1, m)$.
Nous nous proposons de démontrer que $\psi = 0$ m-presque partout (c'est une condition nécessaire de m-ergodicité de f par 1.6). Pour cela, nous avons besoin des lemmes qui suivent :

1.9 Soit f un homéomorphisme de T^1 de classe P, avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soient q_n les dénominateurs des réduites de α. On a, si $n \to +\infty$, $q_n \alpha \to 0 \bmod 1$. On a, par l'inégalité de Denjoy VI.4.4,

$$|Df^{q_n}|_\infty \leq e^V \quad , \text{ avec } V = \text{"Var(Log Df)"} \quad .$$

Il résulte que $|Df^{q_n} - 1|_\infty \leq \sup(e^V - 1, 1) \leq e^V$.

On a le lemme :

Lemme : Soit $\varphi \in L^1(T^1, m)$, alors $\lim_{n \to +\infty} \int_{T^1} \varphi.(Df^{q_n} - 1)\,dm = 0$.

Démonstration : Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_o tel que, si $n \geq n_o$,

$$\left| \int_{T^1} \varphi.(Df^{q_n} - 1)\,dm \right| \leq \varepsilon \quad .$$

Soit $\varphi_1 \in C^o(T^1)$, avec $|\varphi - \varphi_1|_{L^1} \leq \varepsilon e^{-V}/2$. On a, par l'inégalité de Denjoy VI.4.4,

$$\left| \int_{T^1} \varphi.(Df^{q_n} - 1)\,dm \right| \leq |\varphi - \varphi_1|_{L^1} e^V + \left| \int_{T^1} \varphi_1 (Df^{q_n} - 1)\,dm \right) \quad .$$

Or, par la formule de changement de variable

$$\left| \int_{T^1} \varphi_1 (Df^{q_n} - 1)\,dm \right| \leq |\varphi_1 \circ f^{-q_n} - \varphi_1|_o$$

sur T^1, si $n \to +\infty$, $f^{-q_n} \to Id$ dans la C^o-topologie. En effet, puisque f est C^o-conjugué à R_α par le théorème de Denjoy, on a $f^{-q_n} = h^{-1} \circ R_{-q_n\alpha} \circ h$, or, si $n \to +\infty$, $-q_n\alpha \to 0 \bmod 1$. Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi_1 \circ f^{-q_n} - \varphi_1|_o = 0 \quad (\varphi_1 \text{ est continue}) \ .$$

Il existe donc n_o tel que, si $n \geq n_o$, on ait

$$|\varphi_1 \circ f^{-q_n} - \varphi_1|_o \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

On a donc bien, si $n \geq n_o$,

$$\left|\int_{T^1} \varphi(Df^{q_n} - 1)dm\right| \leq \varepsilon \ . \ \blacksquare$$

1.10 Remarque : Le lemme 1.9 affirme que, si $n \to +\infty$, $Df^{q_n} - 1$ tend vers 0 dans $L^\infty(T^1,m)$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty,L^1)$. Attention, en général $|Df^{q_n} - 1|_{L^1}$ ne tend pas vers 0 si $n \to +\infty$! (Par exemple, l'homéomorphisme PL de VI.6.4.)

1.11 Avec les mêmes hypothèses qu'en 1.9, on a le

Lemme : Soit $\varphi_n \in L^1(T^1,m)$ avec, si $n \to +\infty$, $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^1(T^1,m)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T^1} \varphi_n(Df^{q_n} - 1)dm = 0 \ .$$

Démonstration : On a, par 1.9 et l'inégalité de Denjoy,

$$\left|\int_{T^1} \varphi_n(Df^{q_n} - 1)dm - \int_{T^1} \varphi(Df^{q_n} - 1)dm\right|$$

$$\leq |\varphi - \varphi_n|_{L^1} |Df^{q_n} - 1|_{L^\infty} \leq |\varphi - \varphi_n|_{L^1} e^V \ . \ \blacksquare$$

1.12 On suppose dans la suite que $f \in Diff^2_+(T^1)$ et que $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Les q_n sont les dénominateurs des réduites de α. On a alors, par l'inégalité de Denjoy,

$$e^{-V} \leq Df^{\pm q_n} \leq e^V \ ,$$

avec $V = Var(\text{Log } Df)$.

1.13 On rappelle que $\psi_n = \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}$ et que $\psi = \lim_{n \to +\infty} \psi_n$

(limite m-presque partout).

On pose $\varphi_n = D\left(\dfrac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right)$. On a la

Proposition : On a, pour tout n,

$$|\varphi_n|_o \leq \left|\frac{D^2 f}{Df}\right|_o ,$$

et, si $n \to +\infty$, on a $\varphi_n \to -1/2\ \psi$, convergence m-presque partout et dans $L^1(T^1, m)$.

Démonstration : On a

$$\varphi_n = D\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right) = - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} D^2 f^i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2}$$

$(D^2 f^o = 0)$.

Par la formule 1.7, on a

$$\varphi_n = - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Df^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^j . Df^j\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2} .$$

Il suit que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|\varphi_n|_o \leq \left|\frac{D^2 f}{Df}\right|_o .$$

Si on montre que, si $n \to +\infty$, $\varphi_n \to -1/2\ \psi$ m-presque partout , alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on aura $\varphi_n \to -1/2\ \psi$ dans L^1. Montrons que, si $n \to +\infty$, $\varphi_n \to -1/2\ \psi$ m-presque partout. Pour cela, introduisons ψ dans l'expression de φ_n. On a

$$-\varphi_n = A_n + B_n$$

avec

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Df^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} Df^j \right) (\psi_i - \psi)}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \; {}^2}$$

et

$$B_n = \psi \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} Df^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} Df^j \right) \right)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right)^2} \quad .$$

Montrons que, si $n \to +\infty$, $A_n \to 0$ m-presque partout.
Soit $x \in T^1$, tel que $\psi(x)$ existe et $\lim_{n \to +\infty} |\psi_i(x) - \psi(x)| = 0$. On a

$$|A_n(x)| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Df^i(x) |\psi_i(x) - \psi(x)|}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)} \quad .$$

Par l'inégalité de Denjoy, on a $Df^{q_i}(x) \geq e^{-V}$, donc, si $n \to +\infty$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x) \to +\infty \quad .$$

Par le lemme bien connu suivant, si $c_i > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} c_i = +\infty$ et si (b_i) est une suite de nombres réels avec $\lim_{i \to +\infty} b_i = 0$, alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_i \, b_i}{\sum_{i=0}^{n=1} c_i} = 0$$

(i.e. la convergence implique la convergence Cesaro); on en conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} |A_n(x)| = 0 \quad .$$

On a bien, si $n \to +\infty$, $A_n \to 0$ m-presque partout.
Pour montrer que si $n \to +\infty$, $-\varphi_n \to 1/2 \, \psi$, il nous reste donc à montrer que $B_n \to 1/2 \, \psi$ m-presque partout, et la proposition en résultera.
On a

$$B_n = \psi \cdot D_n$$

avec

$$D_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Df^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} Df^j \right)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right)^2} \quad .$$

Montrons que si $n \to +\infty$, $D_n \to 1/2$ uniformément.

Or

$$D_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(Df^i)^2}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(Df^i)^2}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2} \quad .$$

Soit $x \in T^1$, on a

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(Df^i)^2(x)}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)\right)^2} \leq \sup_{0\leq p\leq n-1} \frac{Df^p(x)}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)} \leq \sup_{0\leq p\leq n-1} \left|\frac{Df^p}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_o$$

et le lemme suivant (1.14) montre bien que si $n \to +\infty$, $D_n \to 1/2$ uniformément, et donc il résulte $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} -B_n = -1/2\,\psi$ (limite m-presque partout). ∎

1.14 Lemme : Si $n \to +\infty$, $\sup_{0\leq p\leq n-1} \left|\frac{Df^p}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_o \longrightarrow 0$.

Démonstration : Pour $x \in T^1$, on a par la formule $Df^i(x) = Df^{i-p}(f^p(x)).Df^p(x)$

$$\frac{Df^p(x)}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i(x)} = \frac{Df^p(x)}{Df^p(x).\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^{i-p}(f^p(x))\right)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^{i-p}(f^p(x))} \quad .$$

Or, si $|i-p| = q_k$, par l'inégalité de Denjoy $Df^{\pm q_k} \geq e^{-V}$, on a

$$\frac{Df^p}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \leq \frac{e^V}{1 + \mathrm{card}\{k \mid q_k \leq \frac{n-1}{2}\}} = C_n \quad .$$

Or, si $n \to +\infty$, $C_n \to 0$ (C_n est indépendant de x et p). ∎

1.5 Rappelons que $\psi = \lim_{n\to+\infty} \psi_n$. On a la proposition suivante :

Proposition : $\psi = 0$ m-presque partout.

Démonstration : Soit $\varphi \in C^1(T^1)$. Nous allons montrer que $\int_{T^1} \varphi.\psi \, dm = 0$.

En effet, on a $\psi_{q_n} \to \psi$ dans L^1 si $n \to +\infty$. On a donc

$$\int_{T^1} \varphi.\psi \, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{T^1} \varphi.\psi_{q_n} \, dm \quad .$$

Par le lemme 1.11, on a

$$\int_{T^1} \varphi.\psi \, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{T^1} \varphi.\psi_{q_n}.Df^{q_n} \, dm \quad .$$

Or, par 1.7, on a

$$D^2 f^{q_n} = Df^{q_n} \left(\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \, . \, Df^i \right) \quad ,$$

donc

$$\psi_{q_n} \, . \, Df^{q_n} = \frac{D^2 f^{q_n}}{\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i \right)} \quad .$$

Il en résulte que

$$\int_{T^1} \varphi.\psi \, dm = \lim_{n\to+\infty} \int_{T^1} \frac{\varphi}{\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i \right)} \, . \, D^2 f^{q_n} \, dm \quad .$$

Intégrons par parties

$$\int_{T^1} \varphi.\psi \, dm = \lim_{n\to+\infty} - \int_{T^1} D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) . \, (Df^{q_n} - 1) \, dm \quad .$$

On a

$$D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) = \frac{D\varphi}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} + \varphi \, . \, D\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) \quad .$$

Par l'inégalité de Denjoy, et par 1.13, on a, si $n \to +\infty$,

$$D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \longrightarrow -\frac{1}{2} \varphi \, . \, \psi$$

convergence m-presque partout et dans L^1.

On a donc par le lemme 1.11

$$\int_{T^1} \varphi.\psi \, dm = 0 \quad .$$

Comme φ est arbitraire dans $C^1(T^1)$, ψ est donc orthogonal dans $L^2(T^1,m)$ à $C^1(T^1)$, il résulte que $\psi = 0 \in L^2(T^1,m)$. On a bien démontré

$$\psi = 0 \text{ m-presque partout.} \quad \blacksquare$$

1.16 Corollaire : Pour tout $\varphi \in C^1(T^1)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) \right|_{L^1} = 0 \quad ,$$

et on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} |\psi_n|_{L^1} = 0 \quad .$$

Démonstration : En effet, par 1.15, si $n \to +\infty$, $\psi_n \to \psi = 0$ m-presque partout et dans L^1, et, si $n \to +\infty$, $D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right) \to -\frac{1}{2} \varphi \, . \, \psi = 0$ m-presque partout et dans L^1 (par 1.13 et 1.15). $\blacksquare$

1.17 Démonstration (de la m-ergodicité de f) du théorème 1.4.
Soit $A \subset T^1$, A m-mesurable, avec $f(A) = A$.
Soit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 - m(A) & \text{si } x \in A \\ -m(A) & \text{si } x \in T^1 - A \end{cases} .$$

On a $\chi_A \in L^\infty(T^1,m)$ et $\chi_A \circ f = \chi_A$ (χ_A est invariante par f).
Soit $\Phi(x) = \int_0^x \chi_A(x)dx$, $0 \le x \le 1$.
Puisque $\int_0^1 \chi_A(x)dx = 0$, $\Phi \in C^0(T^1)$, et Φ est une fonction lipschitzienne.
Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par f (i.e. $f_*\mu = \mu$) sur T^1, et $\Phi_A(x) = \Phi(x) - \mu(\Phi)$.
Par l'inégalité de Denjoy-Koksma VI.3, on a

$$\left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \Phi_A \circ f^i \right|_0 \le \mathrm{Var}(\Phi) = \int_{T^1} |\chi_A(x)| dx = 2(1 - m(A))m(A) \le \frac{1}{2} \quad .$$

Soit $\varphi \in C^1(T^1)$. On a d'après 1.6

$$\int_{T^1} \chi_A \cdot \varphi \, dm = \int_{T^1} \varphi \cdot \frac{\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} \chi_A \circ f^i \cdot Df^i \right)}{\left(\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i \right)} \, dm \quad .$$

Intégrons par parties :

$$\int_{T^1} \chi_A \cdot \varphi \, dm = -\int_{T^1} D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \left(\sum_{i=0}^{q_n-1} \Phi_A \circ f^i \right) dm \quad ,$$

donc on a

$$\left| \int_{T^1} \chi_A \cdot \varphi \, dm \right| \leq \frac{1}{2} \left| D\left(\frac{\varphi}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \right|_{L^1} \quad .$$

Si $n \to +\infty$ par 1.16, il résulte que

$$\left| \int_{T^1} \chi_A \cdot \varphi \, dm \right| = 0 \quad .$$

Comme φ est arbitraire dans $C^1(T^1)$, on a

$$\chi_A = 0 \quad \text{m-presque partout,}$$

et donc $$m(A) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad . \quad \blacksquare$$

2. COMMENT REVENIR PAR CONJUGAISON A UNE ROTATION.

2.1 Soit $0 \leq r \leq \omega$ et $f \in D^r(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha$. On pose, si $n \geq 1$,

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha) \quad .$$

On a $g_n \in D^r(T^1)$. Rappelons (IV.5.1) que, si f est C^k-conjugué à R_α (pour un $0 \leq k \leq r$), alors $n \to +\infty$, $g_n \to g \in D^k(T^1)$ dans la C^k-topologie, et on a

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad .$$

Le problème de la conjugaison C^k de f à R_α est finalement réduit au problème de savoir dans quelle topologie g_n converge.

Si f est C^r-conjugué à R_α, alors, $n \to +\infty$, alors $g_n \circ f \circ g_n^{-1} \to R_\alpha$ dans la C^r topologie.

Posons $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$.

Si $f \in D^r(T^1)$, alors $f_n \in D^r(T^1)$ et $\rho(f_n) = \rho(f)$; $g_n \in D^r(T^1)$, de plus on a

$$g_n \circ f = \alpha + g_n + \frac{f^n - Id - n\alpha}{n} \quad .$$

On a donc

$$\boxed{f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1} = R_\alpha + \frac{f^n - Id - n\alpha}{n} \circ g_n^{-1} \quad .}$$

Nous allons montrer que $f_n \to R_\alpha$ en général dans une topologie plus fine que celle pour laquelle f est conjugué à R_α ; par exemple on a la

2.2 Proposition : Soit $f \in D^0(T^1)$, avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}$ (non nécessairement dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Alors, si $n \to +\infty$, $f_n \to R_\alpha$ dans la C^0-topologie.

Remarquons que f n'est pas nécessairement C^0-conjugué à R_α (par exemple $\rho(f) = 0$ et $f \neq Id$).

Démonstration : Par II.2.5, on a, pour tout n, l'inégalité du nombre de rotation

$$|f^n - Id - n\alpha|_0 < 1 \quad .$$

Il résulte $$|f_n - R_\alpha|_0 < \frac{1}{n} \quad . \quad \blacksquare$$

2.3 Proposition : Soit $f \in D^{1+vb}(T^1)$ (i.e. Df est à variation bornée); si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, si $n \to +\infty$, alors $f_n \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie.

Démonstration : On a

$$Df_n - DR_\alpha = D\left(\frac{f^n - Id - n\alpha}{n} \circ g_n^{-1} \right)$$
$$= \frac{(Df^n - 1) \circ g_n^{-1}}{n} \cdot Dg_n^{-1} \quad .$$

Or $$Dg_n^{-1} = \frac{1}{Dg_n \circ g_n^{-1}} = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1}$$

donc on a

$$Df_n - DR_\alpha = \frac{Df^n - 1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1} \quad .$$

En écrivant $Df^n = Df \circ f^{n-1} \cdot Df^{n-1}$, on a donc

$$|Df_n - D_\alpha|_o \leq |Df|_o \left| \frac{Df^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_o + \left| \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_o$$

et la proposition 2.3 résulte du lemme 1.14 et de 2.2. ∎

2.4 Remarque : Nous construirons en XII.1.13, $f \in D^\omega(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. f est alors C^o-conjugué à R_α par le théorème de Denjoy, mais f ne sera pas C^1-conjugué à R_α.
On peut facilement voir que, si $n \to +\infty$, $g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha)$, bien que $g_n \to g$ dans la C^o-topologie, g_n ne converge pas dans la C^1-topologie, et même $|Dg_n|_o$ est non bornée ; néanmoins la proposition 2.3 montre que $f_n \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie (!).

2.5 Soit $f \in D^2(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et soient q_n les dénominateurs des réduites de α. Soient

$$V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\ Df)$$

$$V_{q_n} = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}(Df_{q_n})) \quad .$$

Alors on a le théorème suivant, capital pour la suite.

Théorème : Si $n \to +\infty$, $V_{q_n} \to 0$ (ou encore, si $n \to +\infty$, $f_{q_n} \to R_\alpha$ dans la C^{1+vb}-topologie).

Démonstration : Puisque, si $n \to +\infty$, $|f_n - R_\alpha|_{C^1} \to 0$, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que, si $n \to +\infty$, $\mathrm{Var}(D f_{q_n}) \to 0$.

Rappelons que, si $\varphi \in C^1(T^1)$, on a

$$\mathrm{Var}(\varphi) = |D\varphi|_{L^1} = \int_{T^1} |D\varphi(x)|\,dx \quad .$$

On a

$$Df_{q_n} - 1 = \frac{Df^{q_n} - 1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \circ g_n^{-1} \quad .$$

On a donc

$$\mathrm{Var}(Df_{q_n}) = \int_{T^1} \left| D\left(\frac{Df^{q_n} - 1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \circ g_n^{-1} \right) \right| dm \quad .$$

Par la formule de changement de variable, on a

$$\mathrm{Var}(Df_{q_n}) = \left| D\left(\frac{Df^{q_n} - 1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \right|_{L^1} \quad .$$

On a

$$D\left(\frac{Df^{q_n} - 1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) = \frac{D^2 f^{q_n}}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} + (Df^{q_n} - 1) \cdot D\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \quad .$$

Par 1.7, on a la formule

$$D^2 f^{q_n} = Df^{q_n} \cdot \left(\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i \right)$$

donc

$$\mathrm{Var}(Df_{q_n}) \le |Df^{q_n}|_{L^\infty} |\psi_{q_n}|_{L^1} + |Df^{q_n} - 1|_{L^\infty} \left| D\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \right|_{L^1}$$

avec $\psi_{q_n} = \dfrac{\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i}$ comme avant.

Par l'inégalité de Denjoy, on a donc

$$\mathrm{Var}(Df^{q_n}) \leq e^V \left|\psi_{q_n}\right|_{L^1} + e^V \left| D\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{q_n-1} Df^i} \right) \right|_{L^1}$$

et le théorème résulte de 1.16. ∎

2.6 Proposition : Soit $f \in D^2(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et on suppose que f est C^1-conjugué à R_α. Alors, si $n \to +\infty$, $f_n \to R_\alpha$ dans la C^2-topologie.

Démonstration : On a

$$D^2 f_n = D\left(1 + \frac{Df^n - 1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1} \right)$$

avec $Dg_n^{-1} = \dfrac{1}{Dg_n \circ g^{-1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \circ g_n^{-1}$. Soit

$$D^2 f_n = \left[\frac{D^2 f^n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)} - (Df^n - 1) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} D^2 f^i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)} \right] \circ g_n^{-1},$$

par conséquent

$$\left|D^2 f_n\right|_o \leq \left| \frac{D^2 f^n}{n} \right|_o \cdot \left| \frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_o^2 + \left|Df^n - 1\right|_o \left| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} D^2 f^i}{n^2} \right|_o \cdot \left| \frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_o^3 .$$

Pour démontrer que, si $n \to +\infty$, $\left|D^2 f_n\right|_o \to 0$, il suffit de vérifier

a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|Df^n - 1\right|_o < +\infty$;

b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|_o < +\infty$;

c) $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{D^2 f^n}{n} \right|_o = 0$.

Il résulte alors

d) $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{D^2 f^i}{n^2} \right|_o = 0$.

en effet

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n-1}\frac{D^2f^i}{n}\right|_o \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{D^2f^i}{i}\right|_o \quad .$$

c) implique d) par le fait que la convergence implique la convergence Cesaro.

Vérification de a) et b).

Puisque f est C^1-conjugué à R_α ($f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$). Il existe $1 < k < +\infty$, $k = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |Df^n|_o$, tel que, pour tout n, on a

$$\frac{1}{k} \leq Df^n \leq k \quad .$$

On a donc a)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |Df^n - 1|_o \leq k + 1$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \geq \frac{1}{k} \quad ,$$

soit b)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}\right|_o \leq k \quad .$$

Vérification de c).

Soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, avec $g \in D^1(T^1,0)$. On a $f^i = g^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g$, alors $Df^i = (Dg^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g) \,.\, Dg$. Comme par 1.8 on a

$$D^2f^n = Df^n \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2f}{Df} \circ f^i \,.\, Df^i\right) \quad ,$$

on a

$$\left|\frac{D^2f^n}{n}\right|_o \leq |Df^n|_o \cdot \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2f}{Df} \circ f^i \,.\, Df^i\right|_o \leq k \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2f}{Df} \circ f^i \,.\, Df^i\right|_o$$

avec $k = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |Df^n|_o < +\infty$. Il suit

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2f}{Df} \circ f^i \,.\, Df^i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{D^2f}{Df} \circ g^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g\right) \,.\, (Dg^{-1} \circ R_{i\alpha} \circ g) \,.\, Dg$$

donc

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{D^2f}{Df}\circ f^i.Df^i\right|_o \leq |Dg|_o \cdot \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{D^2f}{Df}\circ g^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g\right).\left(Dg^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g\right)\right|_o .$$

Comme $g\in D^1(T^1)$, on a $|Dg|_o < +\infty$, et tout se réduit à la vérification de

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{D^2f}{Df}\circ g^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g\right).\left(Dg^{-1}\circ R_{i\alpha}\circ g\right)\right|_o = 0 .$$

Il faut donc vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{D^2f}{Df}\circ g^{-1}\circ R_{i\alpha}\right).\left(Dg^{-1}\circ R_{i\alpha}\right)\right|_o = 0 ,$$

c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ R_{i\alpha}\right|_o = 0$, avec $\varphi = \left(\frac{D^2f}{Df}\circ g^{-1}\right).Dg^{-1}\in C^o(T^1)$.

Comme $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, alors en vertu de l'unique ergodicité de R_α, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi\circ R_{i\alpha} - \int_{T^1}\varphi(x)dx\right|_o = 0 .$$

Il suffit alors de vérifier que

$$\int_{T^1}\varphi(x)dx = 0$$

Or, par la formule de changement de variable, on a bien

$$\int_{T^1}\frac{D^2f}{Df}\circ g^{-1}.Dg^{-1}\,dm = \int_{T^1}\frac{D^2f}{Df}\,.\,dm = [\mathrm{Log}\,Df]_0^1 = 0 ,$$

et la proposition résulte alors de 2.2 et 2.3 et du fait que nous venons de prouver que $\lim_{n\to+\infty}|D^2f^n - D^2R_\alpha|_o = 0$. ∎

2.7 Rappelons que nous avons posé pour $0<\varepsilon<1$, $C^\varepsilon(T^1)$ sont les fonctions $\varphi\in C^o(T^1)$ qui sont höldériennes d'exposant ε, i.e. telles que

$$|\varphi|_\varepsilon = \sup_{x\neq y}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^\varepsilon}\right| < +\infty .$$

Pour la norme $|||\varphi|||_\varepsilon = |\varphi|_o + |\varphi|_\varepsilon$, $C^\varepsilon(T^1)$ est une algèbre de Banach, et sa topologie s'appelle la C^ε-topologie. On a les lemmes

2.7.1 Lemme : Soit $\varphi\in C^\varepsilon(T^1)$ et soit $f\in D^o(T^1)$ qui est une application lipschitzienne (il existe $k>0$ tel que, pour tout x et y, on ait

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$), alors $\varphi \circ f \in C^{\varepsilon}(T^1)$ et on a

$$|\varphi \circ f|_{\varepsilon} \leq k^{\varepsilon} |\varphi|_{\varepsilon} \quad .$$

Démonstration : $|\varphi \circ f(x) - \varphi \circ f(y)| \leq |\varphi|_{\varepsilon} |f(x) - f(y)|^{\varepsilon} \leq k^{\varepsilon} |\varphi|_{\varepsilon} |x - y|^{\varepsilon}$. ∎

2.7.2 Lemme : Soit $\varphi \in C^{\varepsilon}(T^1)$ avec $a \leq \varphi \leq b$. Soit $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport k. Alors $\psi \circ \varphi \in C^{\varepsilon}(T^1)$ et

$$|\psi \circ \varphi|_{\varepsilon} \leq k |\varphi|_{\varepsilon} \quad .$$

Démonstration : $|\psi \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi(y)| \leq k|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|\varphi|_{\varepsilon} |x - y|^{\varepsilon}$. ∎

2.7.3 Lemme : Soit $\varphi_n \in C^{\varepsilon}(T^1)$ avec, si $n \to +\infty$, $|\varphi_n|_0 \to 0$. Supposons que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n|_{\varepsilon} < +\infty$. Alors, pour tout ε', $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} |\varphi_n|_{\varepsilon'} = 0 \quad .$$

Démonstration : On a l'inégalité de convexité IX.2.2 $|\varphi_n|_{\varepsilon'} \leq 2 |\varphi_n|_0^{1-(\varepsilon'/\varepsilon)} |\varphi_n|_{\varepsilon}^{(\varepsilon'/\varepsilon)}$; comme $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$, alors $1 - (\varepsilon'/\varepsilon) > 0$ et par conséquent, si $n \to +\infty$, $|\varphi_n|_{\varepsilon}^{1-(\varepsilon'/\varepsilon)} \to 0$, d'où le lemme. ∎

Remarque : Le lemme résulte aussi de l'injection compacte de la boule unité de $C^{\varepsilon}(T^1)$ dans $C^{\varepsilon'}(T^1)$.

2.7.4 Si $r \geq 1$, r non entier, on pose

$$D^r(T^1) = \{f \in D^{[r]}(T^1) \mid D^{[r]} f \in C^{r-[r]}(T^1)\} \quad .$$

Si $r \geq 1$, $D^r(T^1)$ est alors un groupe. On définit la C^r-topologie comme la topologie borne supérieure de la $C^{[r]}$-topologie et de la topologie $C^{r-[r]}$ sur $D^{[r]} f$.

2.7.5 On a la

Proposition : Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $f \in D^{2+\varepsilon}(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on suppose que f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_{α}, alors, pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$, si $n \to +\infty$, $f_n \to R_{\alpha}$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie.

Démonstration : Par 2.6, $f_n \to R_{\alpha}$ dans la C^2-topologie. Si on montre que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |D^2 f_n| < +\infty$, alors par 2.7.3 on en déduit que, pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$,

$$\lim_{n\to+\infty} |D^2 f_n|_{\varepsilon'} = 0$$

et donc $f_n \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie. Il suffit donc de montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |D^2 f_n|_\varepsilon < +\infty$. On a

$$D^2 f_n = \left[\frac{D^2 f^n}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^2} - (Df^n - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n^2} \right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)^3} \right] \circ g_n^{-1} .$$

Par 2.7.1 on a

$$|||D^2 f_n|||_\varepsilon \le C \left[\left|\left|\left| \frac{D^2 f^n}{n} \right|\right|\right|_\varepsilon \cdot \left|\left|\left| \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i\right)} \right|\right|\right|_\varepsilon^2 + |||Df^n - 1|||_\varepsilon \cdot \left|\left|\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n^2} \right|\right|\right|_\varepsilon \cdot \left|\left|\left| \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|\right|\right|_\varepsilon^3 \right]$$

avec

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} |Dg_n^{-1}|_o^\varepsilon .$$

Il suffit de montrer que toutes les $|||\ |||_\varepsilon$ dans l'expression sont finies.

a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty$.

Puisque f est C^1-conjugué à R_α, on a

$$\frac{1}{k} \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Df^i \le k$$

avec $k = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |D f^n|_o$.

Puisque f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α, on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right|_\varepsilon \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |Df^i|_\varepsilon \le k_1 < +\infty$$

avec $k_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |Df^i|_\varepsilon$.

Par le lemme 2.7.2 (puisque $x \to \frac{1}{x}$ est lipschitzien sur $[1/k, k]$). On a bien

$$\sup_{n\ge1} \left|\left|\left| \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty .$$

b) $\sup_{n\geq 1} \left|\left|\left| Df^n - 1 \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty$.

Ceci résulte de $\sup_{n\in\mathbb{N}} |Df^n|_o \leq k < +\infty$ et de $\sup_{n\in\mathbb{N}} |Df^n|_\varepsilon = k_1 < +\infty$ puisque f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α.

c) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| \frac{D^2 f^n}{n} \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty$.

De la formule $D^2 f^n = Df^n . \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \right) . Df^i \right)$. On obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| D^2 f^n \right|\right|\right|_\varepsilon \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| Df^n \right|\right|\right|_\varepsilon\right) \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| \frac{D^2 f}{Df} \circ f^n \right|\right|\right|_\varepsilon \right) \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| Df^n \right|\right|\right|_\varepsilon\right) n$$

$$\leq \text{Cte } n$$

puisque $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\left| \frac{D^2 f}{Df} \circ f^n \right|\right|\right|_\varepsilon \leq \left|\left|\left| \frac{D^2 f}{Df} \right|\right|\right|_\varepsilon \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |Df^n|_o^\varepsilon\right)$ par le lemme 2.7.1, et on a $\left|\left|\left| \frac{D^2 f}{Df} \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty$ puisque f est $C^{2+\varepsilon}$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} |Df^n|_o \leq k < +\infty$ puisque f est C^1-conjugué à R_α. On a donc c).

d) $\sup_{n\geq 1} \left|\left|\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n^2} \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty$.

Cela découle de c) parce que

$$\left|\left|\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Df^i}{n^2} \right|\right|\right|_\varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|\left|\left| \frac{D^2 f^i}{i} \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty .$$

De a), b), c) et d) on obtient immédiatement que $\sup_{n\geq 1} \left|\left|\left| D^2 f_n \right|\right|\right|_\varepsilon < +\infty$ donc $f_n \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie. ∎

2.8 Rappelons que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est un nombre de type Roth si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - p/q| \geq C_\varepsilon / q^{2+\varepsilon}$ et que presque tout nombre (pour la mesure de Lebesgue) est de type Roth. On a le

Théorème : Soit α un nombre de type Roth. Soit $f \in D^r(T^1)$ avec $3 \leq r \leq \omega$ et $\rho(f) = \alpha$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que f soit $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α. Alors f est C^{r-2}-conjugué à R_α (en fait $C^{r-1-\beta}$ pour tout $\beta > 0$). Si f est C^∞ (resp. C^ω), alors f est C^∞- (resp. C^ω-) conjugué à R_α.

Démonstration : En VII.2 et III.4.1.1 nous avons montré que si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est tel qu'il existe $\beta \geq 0$ et $C > 0$ tel que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - p/q| \geq C/q^{2+\beta}$ (i.e. α satisfait une condition diophantienne). Alors, pour tout $\beta' > \beta$, il existe un voisinage $V_{R_\alpha}^{2(1+\beta')}$ dans $F_\alpha^{2(1+\beta')}$ avec la $C^{2(1+\beta')}$-topologie, tel que, si $f \in F_\alpha^r \cap V_{R_\alpha}^{2(1+\beta')}$ avec $2(1+\beta') \leq r \leq \omega$, f est $C^{r-\beta'}$-conjugué à R_α (si $r = +\infty$ ou ω, f est C^∞ ou C^ω-conjugué à R_α respectivement).

Puisque par hypothèse f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à R_α, par 2.7.5, $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1} \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$; de plus, si $f \in D^r(T^1)$, alors $g_n \in D^r(T^1)$, et donc, si $f \in D^r(T^1)$, $f_n \in F_\alpha^r$.

Soit ε_1 tel que $0 < 2\varepsilon_1 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Puisque α est du type Roth, il existe, par ce que nous avons rappelé, un voisinage $V_{R_\alpha}^{2(1+\varepsilon_1)}$ de R_α dans la $C^{2(1+\varepsilon_1)}$-topologie tel que, si $f \in V_{R_\alpha}^{2(1+\varepsilon_1)} \cap F_\alpha^r$, on a la conclusion du théorème. Comme $2(1+\varepsilon_1) < 2+\varepsilon' < 2+\varepsilon$ et que $f_n \to R_\alpha$ dans la $C^{2+\varepsilon'}$-topologie, pour n assez grand, on a la conclusion pour f_n ; or, $g_n \in D^r(T^1)$, et le théorème résulte par conjugaison. ∎

C H A P I T R E IX

DERIVEES SECONDES DES ITERES : DU THEOREME DE DENJOY A LA CONJECTURE D'ARNOLD

Plan :

1. Inégalité de Denjoy Koksma et majoration de la dérivée première des itérés d'un difféomorphisme
   - 1.1 Rappels
   - 1.2 Décomposition canonique de $\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i$
   - 1.3 Inégalités
   - 1.4 Remarques
   - 1.5 Majoration de $|Df^n|_o$ pour f de classe P
   - 1.6 Remarque
   - 1.7 Théorème
2. Inégalités de convexité
   - 2.1 Inégalité de Hadamard
   - 2.2 Inégalité d'interpolation des espaces C^β $0 < \beta < 1$
3. Conjugaison hölderienne des difféomorphismes de classe P de nombre de rotation de densité bornée
4. Critère de $C^{1+\varepsilon}$ conjugaison à une translation
5. Inégalité sur les dérivées secondes des itérés
6. Théorème fondamental de conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations
7. Remarque

Commentaire :

V. I. Arnold a conjecturé dans Arnold [1] :

Conjecture d'Arnold : Il existe $A \subset T^1$ de mesure 1, tel que si $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1), \rho(f) = \alpha \in A$, alors f est C^{ω} conjugué à R_α.

V. I. Arnold a reposé le problème dans Arnold [2] et J. Moser a posé un problème analogue dans J. Moser [3].

Finalement ce mémoire est en grande partie consacré à cette conjecture. Nous donnons en 6 une réponse partielle à cette conjecture, elle est vraie pour les nombres de densité bornée qui forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, mais dense ((et) ayant la puissance du continu). Rappelons que les nombres algébriques de degré 2 sont de densité bornée (ainsi que les nombres de type constant).

Nous montrons en 7 que la conjecture d'Arnold se réduit à la conjugaison C^1.

Arnold dans Arnold [1] donne comme support à sa conjecture le "théorème de Finizi" qui est d'ailleurs équivalent à cette conjecture. Malheureusement la démonstration de Finizi comporte une faute que personne n'a su encore corriger (Voir la note bibliographique).

En fait notre réponse partielle à la conjecture d'Arnold donne un théorème en C^r : si $f \in D^r(T^1)$ $r \geq 3$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de densité bornée, alors f est C^{r-2} (en fait $C^{r-1-\beta}$ pour tout $\beta > 0$) conjugué à R_α. Nous verrons en XI.4.3, que si α n'est pas de type constant pour tout $2 \leq r < +\infty$, il existe $f \in D^r(T^1)$, $\rho(f) = \alpha$, avec f non C^{r-1} conjugué à R_α. Donc en un certain sens le théorème fondamental de 6.1 est le meilleur possible. C'est la raison pour laquelle la dérivée troisième intervient : d'ailleurs nous en avons bien tenu compte en 5.

Pour démontrer le théorème fondamental, tous les chapitres (sauf III) sont indispensables.

La stratégie est la suivante, on cherche à appliquer le théorème VIII.2.8, pour cela on donne en 4 un critère de $C^{1+\varepsilon}$ conjugaison (si le nombre de rotation est de type Roth). Pour appliquer ce critère, on cherche à appliquer l'inégalité d'Hadamard 2.1 à $f^{q_n} - \mathrm{Id} - q_n\alpha$

Pour cela on commence en 1 par étudier l'inégalité de Denjoy-Koksma : pour $q_k \leq n \leq q_{k+1}$, on majore $\left| \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i - n \int_{T^1} \varphi \, d\mu \right|_o$. C'est ici qu'interviennent les nombres de densité bornée ; ce sont ceux qui ont une discrépance en Log n. Nous suivons plutôt Denjoy [3] pour obtenir une majoration qui ne dépende que de Var(φ) et du développement en fraction continue de α. Ceci nous permet d'obtenir la majoration, 1.7, de $|Df^n|_o$, en utilisant VIII.2.5.

Ensuite on obtient en 3.7 une majoration de $|f^{q_n} - Id - d_n - d_n\alpha|$.

Il faut ensuite une inégalité sur $|D^2 f^{q_n}|_o$: c'est l'objet de 5. (et c'est le titre du chapitre).

Finalement en utilisant 5 ainsi que 3.7 et 1.7, on obtient la majoration : si $f \in D^3(T)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, de densité bornée, alors on a

$$|Df^{q_n} - 1|_o = O(q_n^{\delta - \frac{1}{4}}) \quad 0 < \delta < \frac{1}{4}$$

ce qui nous permet d'appliquer le critère de $C^{1+\varepsilon}$ conjugaison 4.2. On peut dire que le théorème fondamental est prouvé par la conjugaison de deux courants :

A) Les petits dénominateurs maitrisés par Kolmogorov, Arnold et Moser qui ont été l'objet du chapitre VII que nous avons résumé en le théorème de VIII.2.8.

B) L'inégalité de Denjoy qui implique le théorème de Denjoy, mais dont nous avons suivi toutes les conséquences au chapitre VIII et que nous suivrons encore dans ce chapitre IX.

L'inégalité de Denjoy est de nature arithmétique, et résulte aussi de ce qu'un homéomorphisme du cercle est à variation bornée ; le point important est que les constantes dépendent de V = Var(Log Df), constante que l'on peut rendre arbitrairement petite par le théorème capital VIII.2.5.

1. INEGALITE DE DENJOY-KOKSMA ET MAJORATION DE LA DERIVEE PREMIERE DES ITERES D'UN DIFFEOMORPHISME

1.1 Rappels

Soit $f \in D^0(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur T^1.

Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$-périodique à variation bornée sur $[0,1]$ avec $\mathrm{Var}(\varphi) = \mathrm{Var}_{[0,1]}(\varphi)$;

on a l'inégalité de Denjoy-Koksma (voir VI.3) :

$$\left| \sum_{i=o}^{q-1} \varphi \circ f^i - q \int_{T^1} \varphi \, d\mu \right|_o \leq \mathrm{Var}(\varphi) .$$

Nous proposons d'obtenir une majoration pour n entier de

$$\left| \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i - n \int_{T^1} \varphi \, d\mu \right|_o \quad \text{en fonction de } \mathrm{Var}(\varphi)$$

et du développement en fraction continue de $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

On supposera pour simplifier dans la suite que

$$\int_{T^1} \varphi \, d\mu = 0 .$$

1.2 Décomposition canonique de $\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i$.

1.2.1 Posons pour n entier ≥ 1,

$$\varphi_n = \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i .$$

Soit $\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Soit (pour ce qui va suivre voir V.7)

$$\alpha = a_o + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots$$

son développement en fraction continue avec $a_o = [\alpha]$.

Si $i \geq 1$, a_i est un entier ≥ 1.

Soit $\frac{p_n}{q_n} = a_o + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots + \frac{1}{a_n}$ les réduites de α. On a

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

avec $\frac{p_o}{q_o} = \frac{a_o}{1}$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_o a_1 + 1}{a_1}$, et si $n \geq 2$,

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} ,$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} .$$

Dans la suite q_n sera toujours le dénominateur d'une réduite de α.
Rappelons que l'on a, si $n \geq 2$ (par V.7.5),

$$q_n \geq 2^{\frac{n}{2}} .$$

1.2.2 Décomposition de n

Soit n un entier tel que $q_k \leq n < q_{k+1}$; divisons n par q_k :

$$n = b_k q_k + r_k \qquad \text{avec } 1 \leq b_k \leq a_{k+1}$$

et $r_k < q_k$.

Si on divise r_k par q_{k-1} et ainsi de suite, on obtient ($q_o = 1$)

$$n = b_k q_k + \ldots + b_i q_i + \ldots + b_o q_o$$

avec pour tout i , $0 \leq b_i \leq a_{i+1}$, et

$$r_i = \sum_{j=o}^{i-1} b_j q_j < q_i$$

1.2.3 Décomposition canonique de φ_n

Pour $q_k \leq n < q_{k+1}$, soit $\varphi_n = \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i$, nous allons grouper dans φ_n ,

les $\varphi_{q_i} = \sum_{j=o}^{q_i-1} \varphi \circ f^j$ en utilisant l'égalité

$$n = \sum_{i=o}^{k} b_i q_i \quad .$$

On a :

$$\varphi_n = \sum_{i=o}^{k} \sum_{j=o}^{b_i-1} (\varphi_{q_i} \circ f^{r_i + jq_i}) \qquad \text{avec}$$

$$r_i = \sum_{j=o}^{i-1} b_j q_j \quad \text{et} \quad r_o = o$$

et si $b_i = 0$,

on convient que la sommation vide est nulle .

1.3 Inégalités

On a la :

1.3.1 Proposition : Soit $f \in D^o(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur T^1. Soit $q_k \leq n < q_k$; $n = \sum_{i=o}^{k} b_i q_i$ comme 1.2.1 et 1.2.2 . Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$- périodique à variation bornée, avec $\int_{T^1} \varphi \, d\mu = 0$, alors on a :

$$\left| \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i \right|_o \leq \left(\sum_{i=o}^{k} b_i \right) \mathrm{Var}(\varphi)$$

Démonstration : On a par 1.2.3 et l'inégalité de Denjoy-Koksma 1.1

$$|\varphi_n|_o \leq \left(\sum_{i=o}^{k} b_i \right) (\sup_i |\varphi_{q_i}|_o) \leq \left(\sum_{i=o}^{k} b_i \right) \mathrm{Var}(\varphi). \quad \blacksquare$$

1.3.2 Comme $b_i \leq a_{i+1}$, de l'inégalité précédente , il résulte que

$$\left| \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i \right|_o \leq \left(\sum_{i=o}^{k} a_{i+1} \right) \mathrm{Var}(\varphi) .$$

1.3.3 Rappelons que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dit de densité bornée d_α si

$$\sup_k \frac{1}{k}\left(\sum_{i=o}^{k} a_{i+1}\right) = d_\alpha < +\infty$$

Alors l'inégalité 1.3.2 donne, si $n \geq q_1$ et $q_k \leq n < q_{k+1}$,

$$\boxed{\left|\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i\right|_o \leq k\, d_\alpha \mathrm{Var}(\varphi)}$$

1.3.4 Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $d_\alpha < +\infty$; si $k \geq 2$,

comme $q_k \geq 2^{\frac{k}{2}}$ par V.7.5 et $q_k \leq n < q_{k+1}$, on a finalement l'inégalité si $n \geq q_2$

$$\boxed{\left|\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i\right|_o \leq d_\alpha \mathrm{Var}(\varphi) k \leq \frac{d_\alpha}{\mathrm{Log}\sqrt{2}} \mathrm{Var}(\varphi) \mathrm{Log}\, n .}$$

1.4 Remarques : a) Les nombres de densité bornée sont des nombres qui ont une discrépance en Log n et on ne peut faire mieux sans autre hypothèse sur φ et f .

b) Pour presque tout α au sens de la mesure de Lebesgue, $d_\alpha = +\infty$.

c) Pour presque tout α, l'inéquation

$$a_i < i(\mathrm{Log}\, i)^2$$

a un nombre fini de solutions et donc l'inégalité 1.3.2. devient pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, il existe C_α tel que si $q_k \leq n < q_{k+1}$, $2 \leq k$, on a

$$\boxed{\left|\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i\right|_o \leq C_\alpha k^2 (\mathrm{Log}\, k)^2 \mathrm{Var}(\varphi) \leq \frac{C_\alpha}{\mathrm{Log}\sqrt{2}} (\mathrm{Log}\, n)^2 (\mathrm{Log\,Log}\, n)^2 \mathrm{Var}(\varphi).}$$

d) Denjoy dans [3] propose une autre inégalité mais il nous semble qu'elle ne change que les constantes.

1.5 Majoration de $|Df^n|_0$ pour f de classe P

Soit $f \in D^0(T^1)$ de classe P, $\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et V = "Var Log Df" que l'on choisit le plus petit possible.

1.5.1 On a par 1.2

si $q_k \leq n < q_{k+1}$ et $n = \sum_{i=o}^{k} b_i q_i$

alors

$$\text{Log } Df^n = \sum_{i=o}^{k} \sum_{j=o}^{b_i - 1} (\text{Log } Df^{q_i}) \circ f^{r_i + jq_i} \quad \text{s.e.d.}$$

avec

$$r_i = \sum_{j=o}^{i-1} b_j q_j$$

et puisque $\int_{T^1} \text{Log } Df \, d\mu = 0$ par VI.1.1 . On conclut par 1.3.2. et 1.3.4.

1.5.2 Si $d_\alpha < +\infty$ et si $q_k \leq n < q_{k+1}$, on a sauf sur un ensemble au plus dénombrable

$$\text{Log } Df^n \underset{\text{s.e.d.}}{\leq} d_\alpha V k \leq \frac{d_\alpha}{\text{Log}\sqrt{2}} V \text{ Log } n, \text{ pour } n \geq q_2$$

1.5.3 Ainsi si f est de classe P, $q_k \leq n < q_{k+1}$

$$Df^n \leq e^{d_\alpha V k} \leq n^{\frac{d_\alpha V}{\text{Log}\sqrt{2}}} \quad \text{s.e.d.} \quad \text{si } n \geq q_2$$

ce qui s'écrit

$$|Df^n|_{L^\infty} \leq e^{d_\alpha V k} \leq n^{\frac{d_\alpha V}{\text{Log}\sqrt{2}}}$$

1.5.4 Donc si f est C^1 et Df à variation bornée et $q_k \leq n < q_{k+1}$ et $n \geq q_2$

$$|Df^n|_o \leq e^{d_\alpha V k} \leq n^{\frac{d_\alpha V}{\text{Log}\sqrt{2}}}$$

1.3.3 Rappelons que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dit de densité bornée d_α si

$$\sup_k \frac{1}{k}\left(\sum_{i=o}^{k} a_{i+1}\right) = d_\alpha < +\infty$$

Alors l'inégalité 1.3.2 donne, si $n \geq q_1$ et $q_k \leq n < q_{k+1}$,

$$\boxed{\left|\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i\right|_o \leq k\, d_\alpha \mathrm{Var}(\varphi)}$$

1.3.4 Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $d_\alpha < +\infty$; si $k \geq 2$,

comme $q_k \geq 2^{\frac{k}{2}}$ par V.7.5 et $q_k \leq n < q_{k+1}$, on a finalement l'inégalité si $n \geq q_2$

$$\boxed{\left|\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i\right|_o \leq d_\alpha \mathrm{Var}(\varphi) k \leq \frac{d_\alpha}{\mathrm{Log}\sqrt{2}} \mathrm{Var}(\varphi) \mathrm{Log}\, n .}$$

1.4 Remarques : a) Les nombres de densité bornée sont des nombres qui ont une discrépance en Log n et on ne peut faire mieux sans autre hypothèse sur φ et f .

b) Pour presque tout α au sens de la mesure de Lebesgue, $d_\alpha = +\infty$.

c) Pour presque tout α, l'inéquation

$$a_i < i(\mathrm{Log}\, i)^2$$

a un nombre fini de solutions et donc l'inégalité 1.3.2. devient pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, il existe C_α tel que si $q_k \leq n < q_{k+1}$, $2 \leq k$, on a

$$\boxed{\left|\sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i\right|_o \leq C_\alpha k^2 (\mathrm{Log}\, k)^2 \mathrm{Var}(\varphi) \leq \frac{C_\alpha}{\mathrm{Log}\sqrt{2}} (\mathrm{Log}\, n)^2 (\mathrm{Log\,Log}\, n)^2 \mathrm{Var}(\varphi).}$$

d) Denjoy dans [3] propose une autre inégalité mais il nous semble qu'elle ne change que les constantes.

1.5 Majoration de $|Df^n|_0$ pour f de classe P

Soit $f \in D^0(T^1)$ de classe P, $\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et V = "Var Log Df" que l'on choisit le plus petit possible.

1.5.1 On a par 1.2

si $q_k \leq n < q_{k+1}$ et $n = \sum_{i=o}^{k} b_i q_i$

alors

$$\text{Log } Df^n = \sum_{i=o}^{k} \sum_{j=o}^{b_i - 1} (\text{Log } Df^{q_i}) \circ f^{r_i + jq_i} \quad \text{s.e.d.}$$

avec

$$r_i = \sum_{j=o}^{i-1} b_j q_j$$

et puisque $\int_{T^1} \text{Log } Df \, d\mu = 0$ par VI.1.1 . On conclut par 1.3.2. et 1.3.4.

1.5.2 Si $d_\alpha < +\infty$ et si $q_k \leq n < q_{k+1}$, on a sauf sur un ensemble au plus dénombrable

$$\text{Log } Df^n \underset{\text{s.e.d.}}{\leq} d_\alpha V k \leq \frac{d_\alpha}{\text{Log}\sqrt{2}} V \text{ Log } n, \text{ pour } n \geq q_2$$

1.5.3 Ainsi si f est de classe P, $q_k \leq n < q_{k+1}$

$$Df^n \leq e^{d_\alpha V k} \leq n^{\frac{d_\alpha V}{\text{Log}\sqrt{2}}} \quad \text{s.e.d.} \quad \text{si } n \geq q_2$$

ce qui s'écrit

$$|Df^n|_{L^\infty} \leq e^{d_\alpha V k} \leq n^{\frac{d_\alpha V}{\text{Log}\sqrt{2}}}$$

1.5.4 Donc si f est C^1 et Df à variation bornée et $q_k \leq n < q_{k+1}$ et $n \geq q_2$

$$|Df^n|_o \leq e^{d_\alpha V k} \leq n^{\frac{d_\alpha V}{\text{Log}\sqrt{2}}}$$

1.6 Remarque : par 1.4 c. on a pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, si f est C^1 et Df à variation bornée, $\rho(f) = \alpha$, $q_k \leq n < q_{k+1}$, $k \geq 2$,

$$|Df^n|_o \leq e^{VC_\alpha\, k^2 (\log k)^2} \leq e^{\frac{VC_\alpha}{\log\sqrt{2}} (\log n \,.\, \log\log n)^2} .$$

Noter que cette majoration croit plus vite que tout polynôme en n.

1.7 On a le

Théorème : Soit $f \in D^2(T^1)$, $\rho(f) = \alpha$ de densité bornée, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que pour tout entier $n \geq q_2$, on a

$$\boxed{|Df^n|_o \leq C_\varepsilon\, n^\varepsilon}$$

(si $\varepsilon \to 0$, a priori $C_\varepsilon \to \infty$)

Démonstration : Par 1.5.4 si $\frac{d_\alpha V}{\log\sqrt{2}} \leq \varepsilon$ où d_α est la densité de α, on a pour tout $n \geq q_2$

$$|Df^n|_o \leq n^\varepsilon .$$

Soit $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$ avec $g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n-1} (f^i - i\alpha)$.

Si $f \in D^r(T^1)$, alors $g_n \in D^r(T^1)$ et $f_n \in D^r(T^1)$ et $\rho(f_n) = \alpha$.

Nous avons montré en VIII.2.5 que si q_i sont des dénominateurs des réduites de α, alors si $i \to +\infty$, $V_{q_i} = \mathrm{Var}(\log Df_{q_i}) \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, et i assez grand pour que $\frac{d_\alpha V_{q_i}}{\log\sqrt{2}} \leq \varepsilon$ mais fixé. On a alors pour tout $n \geq q_2$,

$$|Df^n_{q_i}|_o \leq n^\varepsilon .$$

Or on a $f^n = g_{q_i}^{-1} \circ f^n_{q_i} \circ g_{q_i}$, donc

$$|Df^n|_o \leq |Dg^{-1}_{q_i}|_o |Dg_{q_i}|_o\, n^\varepsilon .$$

On choisit $C_\varepsilon = |Dg^{-1}_{q_i}|_o |Dg_{q_i}|_o$. On a bien

$$|Df^n|_o \leq C_\varepsilon n^\varepsilon \ . \quad \blacksquare$$

2. INEGALITES DE CONVEXITE

2.1 L'inégalité de Hadamard (voir Dieudonné [1], VIII.4 exercice 2)

> Si $\varphi \in C^2(T^1)$, alors $|D'\varphi|_o \leq \sqrt{2}|\varphi|_o |D^2\varphi|_o$.

2.2 Inégalité d'interpolation

Rappelons que si $0 < \beta < 1$, $C^\beta(T^1) = Lip_\beta(T^1)$, est l'ensemble des $\varphi \in C^o(T^1)$ telles que

$$|\varphi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\beta} < +\infty$$

dites fonctions périodiques holdériennes d'exposant β.

Soit $Lip_1(T^1)$ les fonctions périodiques lipschitziennes. On a si $\varphi \in Lip_1(T^1)$

$$|\varphi|_{Lip_1} = \sup_{x \neq y} \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y}\right| = |D\varphi|_{L^\infty} \ .$$

2.2.1 Proposition : Soit $0 < \beta < 1$ et soit $\varphi \in Lip_1(T^1)$, alors

$$|\varphi|_\beta \leq 2|\varphi|_o^{1-\beta} |D\varphi|_{L^\infty}^{\beta}$$

(en particulier si $\varphi \in C^1(T^1)$

$$|\varphi|_\beta \leq 2|\varphi|_o^{1-\beta} |D\varphi|_o^{\beta} \ ) \ .$$

Démonstration : Soit $t > 0$. On a

$$|\varphi|_\beta = \sup_{x \neq y} \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^\beta}\right| \leq \text{Max} \left(\sup_{|x-y| \geq t} \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^\beta}\right|, \sup_{\substack{|x-y| \leq t \\ x \neq y}} \left|\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^\beta}\right| \right)$$

$$\leq \text{Max} \left(\frac{2|\varphi|_o}{t^\beta} , |D\varphi|_{L^\infty} t^{1-\beta} \right) \ .$$

On choisit t tel que $\frac{2|\varphi|_o}{t^\beta} = |D\varphi|_{L^\infty} t^{1-\beta}$, c'est-à-dire $t = \frac{2|\varphi|_o}{|D\varphi|_{L^\infty}}$.

On substitue t, on obtient la proposition. ∎

2.2.2 Proposition : Soit $0 < \beta < 1$ et $\varphi \in C^\beta(T)$, alors pour $\beta' < \beta$, on a

$$|\varphi|_\beta \leq 2|\varphi|_o^{1-\frac{\beta'}{\beta}} |\varphi|_\beta^{\frac{\beta'}{\beta}} .$$

Démonstration : Analogue à 2.2.1.

3. CONJUGAISON HÖLDERIENNE DES DIFFEOMORPHISMES DE CLASSE P A NOMBRE DE ROTATION DE DENSITE BORNEE

3.1 Inégalité géométrique

Soit f un homéomorphisme de classe P, $V = "\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df)"$.

Proposition : Soit f un homéomorphisme de classe P, et $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Soit (q_n) la suite des dénominateurs des réduites de α ; alors on a l'inégalité pour tout n

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o \leq C(f)\lambda^n \quad \text{avec } C(f) \text{ une constante}$$

(dépendant de f), et $\lambda = (1 + e^{-V})^{-\frac{1}{2}} < 1$

Démonstration : Soit $\frac{p_n}{q_n}$ les réduites de α. On a si $n \geq 2$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} ,$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} .$$

Rappelons (voir V.7) que

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n} , \quad |q_n\alpha - p_n| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

et $(-1)^n(q_n\alpha - p_n) > 0$; si $n \geq 2$, on a

$$|q_{n-2}\alpha - p_{n-2}| = a_n|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| + |q_n\alpha - p_n| \geq 2|q_n\alpha - p_n|$$

On conclut que si on pose $q_n\alpha - p_n = \{q_n\alpha\}$; il s'en suit que pour $n \geq 0$

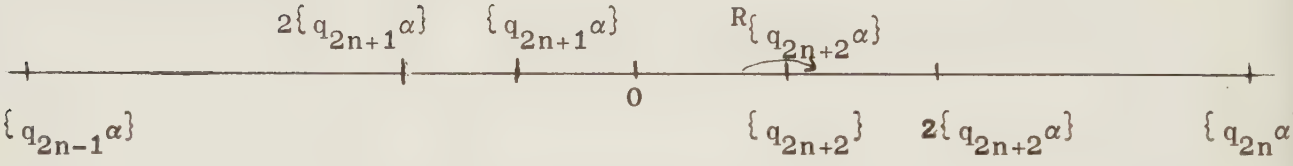
$$R_{\{q_{n+2}\alpha\}}[0,\{q_{n+2}\alpha\}] \subset [0,\{q_n\alpha\}] ,$$

c'est-à-dire dans le cas où n est pair

$$0 < \{q_n\alpha\} < 2\{q_n\alpha\} < \{q_{n-2}\alpha\}$$

et dans le cas où n est impair

$$\{q_{n-2}\alpha\} < 2\{q_n,\alpha\} < \{q_n\alpha\} < 0 .$$



Soit $\hat{f}^{q_n} = f^{q_n} - p_n$. Comme f est C^o conjugué à R_α, alors les $\{\hat{f}^{q_n}(x)\}$ sont dans le même ordre que les $\{q_n\alpha\}$. On a donc

$$\hat{f}^{q_n}[x,\hat{f}^{q_n}(x)] \subset [x,\hat{f}^{q_{n-2}}(x)]$$

et

$$\hat{f}^{q_n}]x,\hat{f}^{q_n}(x)[\cap [x,\hat{f}^{q_n}(x)] = \emptyset .$$

On a donc

A.1 $$|\hat{f}^{q_n}(x) - x| + |\hat{f}^{q_n}(f^{q_n}(x)) - \hat{f}^{q_n}(x)| \leq |\hat{f}^{q_{n-2}}(x) - x|$$

(puisque $\hat{R}_\alpha^{q_n}(0) = \{q_n\alpha\}$ et $\hat{R}_\alpha^{q_n} \circ \hat{R}_\alpha^{q_n}(0) = 2\{q_n\alpha\}$ et $\hat{R}_\alpha^{q_{n-2}}(0) = \{q_{n-2}\alpha\}$) .

Par VI.4.5, on a $|\hat{f}^{q_n}(x) - \hat{f}^{q_n}(y)| \geq e^{-V|x-y|}$, où V="Var(Log Df)"; donc

$$|\hat{f}^{q_n}(\hat{f}^{q_n}(x)) - \hat{f}^{q_n}(x)| \geq \exp(-V|\hat{f}^{q_n}(x) - x|)$$

Il résulte de l'inégalité A.1 que

$$(1 + e^{-V})|\hat{f}^{q_n}(x) - x| \leq |\hat{f}^{q_{n-2}}(x) - x|$$

oit

A.2 $$|\hat{f}^{q_n}(x) - x| \leq \lambda^2 |\hat{f}^{q_{n-2}}(x) - x| \quad \text{avec} \quad \lambda = (1 + e^{-V})^{-\frac{1}{2}} .$$

Considérons séparément les cas $n = 2k$ et $n = 2k + 1$ et multiplions les inégalités A.2

$n = 2k$, $$|\hat{f}^{q_n}(x) - x| \leq \lambda^{2k} |\hat{f}^{q_o}(x) - x| \leq C_1(f)\lambda^n$$

avec $C_1(f) = |\hat{f} - Id|_o \quad (q_o = 1)$

et si

$n = 2k + 1$, $$|\hat{f}^{q_n}(x) - x| \leq \lambda^{2k} |\hat{f}^{q_1}(x) - x| \leq C_2(f)\lambda^n$$

avec $$C_2(f) = \lambda^{-1} |\hat{f}^{q_1} - Id|_o .$$

Soit $C(f) = \text{Max}(C_1(f), C_2(f))$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}^{q_n}(x) - x| = C(f)\lambda^n ,$$

Soit

$$|\hat{f}^{q_n} - Id|_o = |f^{q_n} - Id - p_n|_o \leq C(f)\lambda^n$$

et la proposition résulte du lemme suivant

3.2 Lemme : On a $|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o \leq |f^{q_n} - Id - p_n|_o$.

Démonstration : Par II.2.4 , $f^{q_n} - Id - q_n\alpha$ s'annule et $f^{q_n} - Id - p_n$ garde un signe constant puisque f est sans point périodique.
On a donc

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o \leq \text{Max}_x(\hat{f}^{q_n}(x) - x) - \text{min}_x(\hat{f}^{q_n}(x) - x)$$

$$\leq |\hat{f}^{q_n} - Id|_o . \quad \blacksquare$$

3.3 Corollaire : Si $f \in D^0(T^1)$ est de classe P, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, si q_n sont les dénominateurs des réduites, si $0 < \beta < 1$, il existe une constante C dépendant de f tel que pour tout entier n, on a

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_\beta \leq C\lambda^{n(1-\beta)} \quad \text{avec } \lambda = (1 + e^{-V})^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration : Appliquons l'inégalité de convexité 2.2.2. On a

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_\beta \leq 2|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o^{1-\beta} \cdot |Df^{q_n} - 1|_{L\infty}^{\beta}.$$

Or par 3.1 et l'inégalité de Denjoy, on a bien

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_\beta \leq 2\,C(f)^{1-\beta}\, e^{\beta V}\, \lambda^{n(1-\beta)} = C\lambda^{n(1-\beta)}$$

avec $C = 2\,C(f)^{1-\beta}\, e^{\beta V}$, constante dépendant de f. ∎

3.4 Homéomorphisme de classe C^β

Rappelons que si $0 < \beta < 1$, $h \in D^0(T^1)$ est un homéomorphisme de classe C^β si $h - Id \in C^\beta(T^1)$ et $h^{-1} - Id \in C^\beta(T^1)$.

Ce qui équivaut par IV.6.5.2, à ce qu'il existe $C \geq 1$, tel que pour $0 \leq x - y \leq 1$, on a

$$\left(\frac{1}{C}(x-y)\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq h(x) - h(y) \leq C(x-y)^\beta.$$

On a le

3.5 Théorème : Soit $f \in D^0(T^1)$ de classe P, avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de densité bornée d_α. Alors f est conjugué à R_α par un homéomorphisme de classe C^β, pour tout $\beta < \dfrac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda| + V d_\alpha}$ avec $V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}(Df))$, $\lambda = (1 + e^{-V})^{-\frac{1}{2}}$

De plus $\beta \to 1$, si $V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,Df) \to 0$.

Démonstration : Par IV.6.5.8, il suffit de montrer que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f^n - Id - n\alpha|_\beta < +\infty \quad \text{pour } \beta < \frac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda| + V d_\alpha}.$$

Car ceci implique

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |f^n - Id - n\alpha|_\beta < +\infty \quad \text{par IV.6.5.8 et IV.6.8}$$

(et aussi par le fait que $-\alpha$ est de densité bornée par V.9.5, et en faisant le même raisonnement avec $-\alpha$; on a alors $V = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df^{-1}) = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df)$ et on remplace d_α par $d = \sup(d_\alpha, d_{-\alpha})$) .

On conclut alors que f est conjugué à R_α par un homéomorphisme de classe C^β par IV.6.5.8.

Vérification de $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f^n - \mathrm{Id} - n\alpha|_\beta < +\infty$ si $\beta < \dfrac{|\mathrm{Log}\,\lambda|}{|\mathrm{Log}\,\lambda| + Vd_\alpha}$. Posons $f - \mathrm{Id} - \alpha = \varphi$, on a

$$f^n - \mathrm{Id} - n\alpha = \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i = \varphi_n .$$

On utilise la décomposition canonique de φ_n par 1.2.3.

On a si $q_k \leq n < q_{k+1}$

$$\varphi_n = \sum_{i=o}^{k} \sum_{j=o}^{b_i - 1} \varphi_{q_i} \circ f^{r_i + jq_i}$$

avec $r_i = \sum_{i=o}^{i-1} b_j q_i < q_i$ et $n = \sum_{i=o}^{k} b_i q_i$ et si $b_i = 0$, on convient que la sommation vide $\sum_{i=o}^{b_i - 1}$ est nulle.

Donc on a

$$|\varphi_n|_\beta \leq \sum_{i=o}^{k} \sum_{j=o}^{b_i - 1} |\varphi_{q_i} \circ f^{r_i + jq_i}|_\beta .$$

Par VIII.2.7.1, on a

$$|\varphi_{q_i} \circ f^{r_i + jq_i}|_\beta \leq |Df^{r_i + jq_i}|_{L^\infty}^\beta . |\varphi_{q_i}|_\beta .$$

Par 3.3, on a

$$|f^{q_i} - \mathrm{Id} - q_i\alpha|_\beta \equiv |\varphi_{q_i}|_\beta \leq C\lambda^{i(1-\beta)}.$$

Par 1.5.3 puisque $r_i + j q_i < q_{i+1}$ et $0 \leq j \leq b_i - 1$, pour $i \geq 1$, on a $|Df^{r_i + jq_i}|_{L^\infty} \leq e^{d_\alpha V i}$, donc

$$|\varphi_{q_i} \circ f^{r_i+jq_i}|_\beta \leq C\lambda^{i(1-\beta)} e^{\beta d_\alpha Vi} = C\, e^{i[(\mathrm{Log}\lambda)(1-\beta)+Vd_\alpha\beta)]}$$

$$\leq C\, e^{i\gamma}$$

avec $\gamma = (\mathrm{Log}\lambda)(-\beta+1) + V\, d_\alpha\beta$. On a donc

$$|\varphi_n|_\beta \leq C \sum_{i=o}^{k} a_{i+1}\, e^{i\gamma}$$, C étant une constante indépendante de k.

Puisque $\lambda = (1+e^{-V})^{-\frac{1}{2}}$, on a $\mathrm{Log}\lambda < 0$, donc on aura

$$\gamma < 0 \quad \text{si} \quad -|\mathrm{Log}\lambda|\,(1-\beta) + Vd_\alpha\beta < 0 \ ,$$

soit

$$\beta < \frac{|\mathrm{Log}\lambda|}{|\mathrm{Log}\lambda| + Vd_\alpha} \ .$$

On a alors

$$|\varphi_n|_\beta \leq C \sum_{i=o}^{k} a_{i+1}\, e^{i\gamma} \leq C \sum_{i=o}^{\infty} a_{i+1}\, e^{i\gamma} < +\infty$$

puisque $a_{i+1} < d_\alpha i$ (comme α est de densité bornée. on a bien (voir V.8.3)

$$\sum_{i=o}^{\infty} i e^{i\gamma} < +\infty \quad \text{si } \gamma < 0\ );$$

donc pour tout $\beta < \frac{|\mathrm{Log}\lambda|}{|\mathrm{Log}\lambda| + d_\alpha V}$, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f^n - Id - n\alpha|_\beta < +\infty$$

et donc f est conjugué à R_α par un homéomorphisme de classe C^β .

Puisque $\lambda = (1+e^{-V})^{-\frac{1}{2}}$, si $V \to 0$, on a $\lambda \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ et il résulte bien que si $V \to 0$

$$\frac{|\mathrm{Log}\lambda|}{|\mathrm{Log}\lambda| + V\, d_\alpha} \to 1 \ . \quad \blacksquare$$

3.6 Théorème : Soit $f \in D^2(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ de densité bornée d_α; alors pour tout $\beta < 1$, f est conjugué à R_α par un homéomorphisme de classe C^β .

Remarque : La fonction $(\sin 2\pi x).\mathrm{Log}\,|\sin 2\pi x| \in C^\beta(T^1)$ pour tout $\beta < 1$, mais cette fonction n'est pas C^1, ni lipschitzienne.

Démonstration : Soit $f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$ avec $g_n = \frac{1}{n}\sum_{i=o}^{n-1}(f^i - i\alpha)$; si $f \in D^r(T^1)$, alors $g_n \in D^r(T^1)$ et $f_n \in D^r(T^1)$; de plus $\rho(f_n) = \rho(f) = \alpha$. Rappelons que nous avons montré en VIII.2.5. que si q_n sont les dénominateurs des réduites de α, alors lorsque $n \to +\infty$,

$$V_{q_n} = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,(Df_{q_n})) \to 0 \ .$$

Soit $\beta < 1$ donné et n assez grand pour que

$$\frac{|\mathrm{Log}\,\lambda_n|}{|\mathrm{Log}\,\lambda_n| + V_{q_n} d_\alpha} > \beta \quad \text{avec } \lambda_n = (1 + e^{-V_{q_n}})^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Par le théorème précédent 3.5 , f_{q_n} est alors C^β conjugué à R_α .

Or

$$f = g_{q_n}^{-1} \circ f_{q_n} \circ g_{q_n} \quad \text{avec} \quad g_{q_n} \in D^2(T^1)$$

donc il suit que :
f est conjugué à R_α par un homéomorphisme de classe C^β. Comme β est arbitraire ($\beta < 1$), le théorème est démontré . ∎

3.7 Corollaire : Soit $f \in D^2(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ de densité bornée; alors pour tout $1 > \varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n

$$\boxed{|f^{q_n} - \mathrm{Id} - q_n\alpha|_o \leq \frac{C_\varepsilon}{q_n^{1-\varepsilon}}}$$

(q_n sont les dénominateurs des réduites de α).

Démonstration : On a par le théorème précédent 3.6
$f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec h^{-1} un homéomorphisme de classe C^β pour tout $\beta < 1$.

Donc par IV.6.5.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que si $0 \leq |x-y| \leq 1$ on a

$$|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| \leq C_\varepsilon |x-y|^{1-\varepsilon}.$$

On a si $\frac{p_n}{q_n}$ sont les réduites de α

$$f^{q_n} - Id - p_n = (h^{-1} \circ R_{q_n\alpha - p_n} \circ h) - (h^{-1} \circ h);$$

donc pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |f^{q_n}(x) - x - p_n| &\leq |h^{-1}(q_n\alpha - p_n + h(x)) - h^{-1}(h(x))| \\ &\leq C_\varepsilon |q_n\alpha - p_n|^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$, tel que

$$|f^{q_n} - Id - p_n|_o \leq C_\varepsilon |q_n\alpha - p_n|^{1-\varepsilon} < \frac{C_\varepsilon}{q_n^{1-\varepsilon}}$$

(puisque $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$).

Or par 3.2

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o \leq |f^{q_n} - Id - p_n|_o,$$

d'où il résulte bien que l'on a

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o \leq \frac{C_\varepsilon}{q_n^{1-\varepsilon}}. \quad \blacksquare$$

4. CRITERE DE $C^{1+\varepsilon}$ CONJUGAISON A UNE TRANSLATION

Remarques

4.1 Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $D^{1+\varepsilon}(T^1) = \{f \in D^1(T^1) \mid Df \in C^\varepsilon(T^1)\}$

Rappelons que $D^{1+\varepsilon}(T^1)$ est un groupe. Soit $f \in D^{1+\varepsilon}(T^1)$ et on suppose que f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α, $\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Soit q_n les dénominateurs des réduites de α. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que si $n \to +\infty$, on a

$$|Df^{q_n} - 1|_o \leq \frac{C}{q_n^{\varepsilon}} .$$

Nous nous proposons de montrer une réciproque partielle à cette remarque.

Rappelons (Cf. V.8.3) que α est un nombre de type Roth si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et si pour tout $\delta > 0$

$$\sum_{i=o}^{\infty} a_{i+1} q_n^{-\delta} < +\infty .$$

Evidemment tout nombre de densité bornée est de type Roth puisque $a_{i+1} < d_\alpha i$ et $q_n \geq 2^{\frac{n}{2}}$ si $n \geq 2$.

4.2 Critère de $C^{1+\varepsilon}$ conjugaison

Soit $f \in D^2(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, α un nombre de type Roth. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel si $n \to +\infty$

$$|Df^{q_n} - 1|_o \leq O\left(\frac{1}{q_n^{\delta}}\right) .$$

Alors pour tout $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$, f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α .

Démonstration : a) Montrons que f est C^1 conjugué à R_α, pour cela par IV.6.1.1, il faut et il suffit de montrer

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\operatorname{Log} Df^n|_o < +\infty .$$

Soit $q_k \leq n < q_{k+1}$ et on écrit la décomposition canonique de $\operatorname{Log} Df^n$ d'après 1.5.1 .

On a

$$|\operatorname{Log} Df^n|_o \leq \sum_{i=o}^{k} a_{i+1} |\operatorname{Log} Df^{q_i}|_o .$$

Or

$$|Df^{q_n} - 1|_o = O\left(\frac{1}{q_n^{\delta}}\right)$$

implique qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout n, on a

$$|\text{Log Df}^{q_n}|_o \leq \frac{C_1}{q_n^{\delta}} ,$$

donc

$$|\text{Log Df}^n|_o \leq \sum_{i=o}^{k} a_{i+1} \frac{C_1}{q_i^{\delta}} \leq C_1 \sum_{i=o}^{\infty} a_{i+1} q_n^{-\delta} < +\infty$$

puisque α est de type Roth.

On a bien

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\text{Log Df}^n|_o < +\infty$$ ce qui implique que f est C^1 conjugué à R_α .

b) <u>Montrons que f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$</u> .

Commençons par deux inégalités :

(1) $$|D \text{ Log Df}^n|_o \leq n.C_2 .$$

n effet

$$D(\text{Log Df}^n) = \sum_{i=o}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i . Df^i ,$$

donc

$$|D \text{ Log Df}^n|_o \leq n\, C_2$$

avec

$$C_2 = (\sup_{i\in\mathbb{Z}}(|Df^i|_o).\left|\frac{D^2 f}{Df}\right|_o < +\infty$$

puisque f est C^1 conjugué à R_α d'après a) .

Si $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$, il existe $C_3 > 0$ et $\gamma > 0$ tel que pour tout n on a

(2) $$\left|\operatorname{Log} Df^{q_n}\right|_\varepsilon \leq \frac{C_3}{q_n^\gamma} \quad .$$

En effet, appliquons l'inégalité de convexité 2.2.1 à la fonction $\operatorname{Log} Df^{q_n}$.

On a si $\varepsilon > 0$

$$\left|\operatorname{Log} Df^{q_n}\right|_\varepsilon \leq 2\left|\operatorname{Log} Df^{q_n}\right|_o^{1-\varepsilon}\left|D \operatorname{Log} Df^{q_n}\right|_o^{\varepsilon} \quad ,$$

o. d'après a) $\left|\operatorname{Log} Df^{q_n}\right|_o \leq \frac{C_1}{q_n^\delta}$. On a donc d'après (1)

$$\left|\operatorname{Log} Df^{q_n}\right|_\varepsilon \leq \frac{C_1^{1-\varepsilon}}{q_n^{\delta(1-\varepsilon)}}\, C_2^{\varepsilon}\, q_n^{\varepsilon}$$

$$= \frac{C_3}{q_n^\gamma}$$

avec $C_3 = C_1^{1-\varepsilon}\, C_2^{\varepsilon}$ et $\gamma = \delta(1-\varepsilon)-\varepsilon$, on a bien $\gamma > 0$ si $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$.

D'après IV.6.3.3 pour montrer b), il faut et il suffit de montrer que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\operatorname{Log} Df^n\right|_\varepsilon < +\infty \qquad \text{si} \qquad \varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta} \quad .$$

Pour cela on a par 1.5.1 si $q_k \leq n \leq q_{k+1}$, $n = \sum_{i=o}^{k} b_i q_i$, $r_i = \sum_{j=o}^{i-1} b_j q_j$,

alors

$$\operatorname{Log} Df^n = \sum_{i=o}^{k} \sum_{j=o}^{b_i-1} \operatorname{Log} Df^{q_i} \circ f^{r_i+jq_i} \quad .$$

On a par VIII.2.7.1

$$\left|\operatorname{Log} Df^{q_i} \circ f^{r_i+jq_i}\right|_\varepsilon \leq \left|Df^{r_i+jq_i}\right|_o^{\varepsilon} \left|\operatorname{Log} Df^{q_i}\right|_\varepsilon \quad .$$

Or puisque f est $\mathcal{C}^1$ conjugué à R_α, d'après a), on a

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \left|Df^i\right|_o < +\infty \quad ;$$

donc

$$|\text{Log Df}^{q_i} \circ f^{r_i+jq_i}|_\varepsilon \leq C_4 |\text{Log Df}^{q_i}|_\varepsilon \ ,$$

soit pour $q_k \leq n < q_{k+1}$

$$|\text{Log Df}^n|_\varepsilon \leq C_4 \sum_{i=o}^{k} a_{i+1} |\text{Log Df}^{q_i}|_\varepsilon \ ,$$

et d'après (2)

$$|\text{Log Df}^n|_\varepsilon \leq C_4 C_3 \sum_{i=o}^{k} a_{i+1} q_i^{-\gamma} \ ;$$

si $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$, $\gamma > 0$, on obtient

$$|\text{Log Df}^n|_\varepsilon \leq C_4 C_3 \sum_{i=o}^{\infty} a_{i+1} q_i^{-\gamma} < +\infty$$

puisque α est un nombre de type Roth. Il résulte donc que l'on a pour $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\text{Log Df}^n|_\varepsilon < +\infty \ ;$$

f est alors $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{\delta}{1+\delta}$. ∎

5. INEGALITE SUR LES DERIVEES SECONDES DES ITERES

Théorème : Soit $f \in D^3(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et q_n les dénominateurs de réduites de α. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout n, on a

$$\boxed{|D^2 f^{q_n}|_o \leq C \sqrt{q_n} \left(\sup_{0 \leq p \leq q_n} (|Df^p|_o) \right)}$$

Démonstration : Commençons par supposer

a) $V = \text{Var}(\text{Log Df}) < 1$

On a

$$(1) \qquad D(\operatorname{Log} Df^n) = \sum_{i=o}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i$$

et aussi

$$(2) \qquad D^2 f^n = Df^n \cdot D(\operatorname{Log} Df^n) \cdot$$

Il résulte en dérivant (1) que

$$D^2(\operatorname{Log} Df^n) = \sum_{i=o}^{n-1} (D(\frac{D^2 f}{Df})) \circ f^i \cdot (Df^i)^2 + \sum_{i=o}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot D^2 f^i .$$

On veut évaluer $|D^2 \operatorname{Log} Df^n|_o$. Il faut évaluer les deux termes.

Il est tout à fait clair que :

$$(3) \qquad |\sum_{i=o}^{n-1} (D(\frac{D^2 f}{Df})) \cdot (Df^i)^2|_o \leq n |D(\frac{D^2 f}{Df})|_o |(\sup_{o \leq p \leq n-1} |Df^p|_o^2) .$$

Il reste à évaluer

$$(4) \qquad \sum_{i=o}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot D^2 f^i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot D^2 f^i$$

puisque $D^2 f^o = 0$; par (2) on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot D^2 f^i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i (\sum_{j=o}^{i-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^j \cdot Df^j) .$$

Notons $\frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i = A_i$

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} A_i (\sum_{j=o}^{i-1} A_j) = A_1 A_o + A_2 (A_o + A_1) + \ldots\ldots + A_{n-1} (A_o + \ldots + A_{n-2})$$
$$= \frac{1}{2} (\sum_{i=o}^{n-1} A_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{n-1} A_i^2 .$$

On a donc

$$(6) \qquad |\sum_{i=o}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot D^2 f^i|_o \leq \frac{1}{2} |D(\operatorname{Log} Df^n)|_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{n-1} |\frac{D^2 f}{Df}|_o^2 |Df^i|_o^2$$
$$\leq \frac{1}{2} |D(\operatorname{Log} Df^n)|_o^2 + \frac{1}{2} n |\frac{D^2 f}{Df}|_o^2 (\sup_{o \leq p \leq n-1} |Df^p|_o^2) .$$

On a par (3) et (6)

$$(7) \qquad |D^2 \operatorname{Log} Df^n|_o \leq \frac{1}{2} |D(\operatorname{Log} Df^n)|_o^2 + nC(\sup_{o\leq p\leq n-1} |Df^p|_o^2)$$

avec $C = \frac{1}{2} |\frac{D^2 f}{Df}|_o^2 + |D(\frac{D^2 f}{Df})|_o$.

Appliquons l'inégalité d'Hadamard 2.1 à $\operatorname{Log} Df^{q_n}$.
On a

$$(8) \qquad |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o \leq \sqrt{2 |\operatorname{Log} Df^{q_n}|_o |D^2 \operatorname{Log} Df^{q_n})|_o} \quad ;$$

de l'inégalité de Denjoy, on déduit

$$|\operatorname{Log} Df^{q_n}|_o \leq V = \operatorname{Var}(\operatorname{Log} Df) ,$$

donc

$$|D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o \leq \sqrt{2V |D^2 \operatorname{Log} Df^{q_n})|_o} .$$

Par (7) on a donc

$$(9) \qquad |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o \leq \sqrt{V |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o^2 + 2V C q_n (\sup_{0\leq p\leq q_n} (|Df^p|_o^2)} .$$

Or si $x > 0$ et $y > 0$, on a $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, il suit de (9)

$$(10) \qquad |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o \leq \sqrt{V} |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o + \sqrt{2V C q_n} (\sup_{0\leq p\leq q_n} |Df^p|_o) ,$$

mais $V < 1$, donc $1 - \sqrt{V} > 0$ et on a ainsi

$$(11) \qquad |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o \leq \frac{\sqrt{2VC}}{1-\sqrt{V}} \sqrt{q_n} (\sup_{0\leq p\leq q_n} |Df^p|_o) .$$

Par (1) et par l'inégalité de Denjoy, on a

$$(12) \qquad |D^2 f^{q_n}|_o \leq |Df^{q_n}|_o |D(\operatorname{Log} Df^{q_n})|_o \leq e^V \frac{\sqrt{2VC}}{1-\sqrt{V}} \sqrt{q_n} (\sup_{0\leq p\leq q_n} |Df^p|_o),$$

ce qui est bien l'inégalité cherchée.

b) Cas général

Soit $f_{q_n} \doteq g_n \circ f \circ g_n^{-1}$ avec $g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n-1} (f^i - i\alpha)$.

Si $f \in D^3(T^1)$ alors $g_n \in D^3(T^1)$ et $f_n \in D^3(T^1)$; évidemment $\rho(f_n) = \alpha$.

Nous avons montré en VIII.2.5 que si q_i sont les dénominateurs de réduites de α

$$V_{q_i} = \mathrm{Var}(\mathrm{Log}\, Df_{q_i}) \to 0 \quad \text{si } i \to +\infty \text{ (puisque } f \text{ et } C^2) .$$

Soit i assez grand pour que $V_{q_i} < 1$ mais fixé. On a

$$f = g_{q_i}^{-1} \circ f_{q_i} \circ g_{q_i} \quad \text{avec } g_{q_i} \in D^3(T^1) ,$$

donc $f^{q_n} = g_{q_i}^{-1} \circ f_{q_i}^{q_n} \circ g_{q_i}$ et aussi

$$|D^2 f^{q_n}|_o \leq |D^2 g_{q_i}^{-1}|_o |Dg_{q_i}|_o^2 |Df_{q_i}^{q_n}|_o^2 + |Dg_{q_i}^{-1}|_o |Df_{q_i}^{q_n}|_o |D^2 g_{q_i}|_o +$$
$$+ |Dg_{q_i}^{-1}|_o |Dg_{q_i}|_o^2 |D^2 f_{q_i}^{q_n}|_o$$

et l'inégalité résulte de ce qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout n (par le cas a) puisque $V_{q_i} < 1$)

$$|D^2 f_{q_i}^{q_n}|_o \leq C\sqrt{q_n} \left(\sup_{0 \leq p \leq q_n} |Df^p|_o \right) ,$$

de l'inégalité de Denjoy

$$|Df_{q_i}^{q_n}|_o \leq e^{V_{q_i}} \leq e$$

et du fait que $g_{q_i} \in D^2(T^1)$ (i est fixé). ∎

6. THEOREME FONDAMENTAL DE LA CONJUGAISON DIFFERENTIABLE DES DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS

Le théorème qui va suivre donne une réponse partielle à la conjecture d'Arnold [1] : elle montre que cette conjecture est vraie pour un ensemble de nombres (i.e. les nombres de densité bornée) ayant la puissance du continu et étant dense dans $\mathbb{R}$, néanmoins les nombres de densité bornée sont de mesure de Lebesgue nulle ; or la conjecture d'Arnold serait impliquée si le théorème qui va suivre était vrai pour presque tout nombre de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

6.1 Théorème fondamental : Soit $3 \leq r \leq \omega$ et $f \in D^r(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ un nombre de densité bornée, alors f est C^{r-2} (en fait $C^{r-1-\beta}$ pour tout $\beta > 0$) conjugué à R_α ; de plus si f est de classe C^∞ (resp. C^ω), alors f est C^∞ (resp. C^ω) conjugué à R_α.

Démonstration : Commençons par montrer que f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{1}{5}$; pour cela nous allons appliquer le critère 4 de $C^{1+\varepsilon}$ conjugaison.

Appliquons l'inégalité d'Hadamard 2.1 à $f^{q_n} - Id - q_n\alpha$. On a

$$|Df^{q_n} - 1|_o \leq \sqrt{2|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o |D^2 f^{q_n}|_o} \quad ; \tag{1}$$

soit $0 < \delta < \frac{1}{4}$ fixé , on a par 3.7 lorsque $n \to +\infty$

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o = O\left(\frac{1}{q_n^{1-\delta}}\right) \quad . \tag{2}$$

On a par 1.7

$$|D\, f^p|_o = O(p^\delta) \quad . \tag{3}$$

Par l'inégalité de 5 et par (3), on a

$$|D^2 f^{q_n}|_o = O\left(\sqrt{q_n}\left(\sup_{0 \leq p \leq q_n} |Df^p|_o\right)\right) \tag{4}$$

$$= O(\sqrt{q_n} \cdot q_n^\delta) \quad .$$

(1), (2) et (4) donnent alors

$$|Df^{q_n} - 1|_o = O\left(\sqrt{\frac{1}{q_n^{1-\delta}} \cdot q_n^{\frac{1}{2}+\delta}}\right) = O\left(q_n^{\delta - \frac{1}{4}}\right) .$$

Comme $\frac{1}{4} - \delta > 0$ (puisque $\delta < \frac{1}{4}$), on peut appliquer le critère 4.2 ; f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout

$$\varepsilon < \frac{\frac{1}{4} - \delta}{\frac{1}{4} - \delta + 1} < \frac{1}{5} .$$

Or δ est arbitraire, $0 < \delta < \frac{1}{4}$, donc pour tout $\varepsilon < \frac{1}{5}$, et maintenant le théorème fondamental résulte du théorème VIII.2.8 puisque un nombre de densité bornée est de type Roth d'après V.9.7. ■

6.2 Corollaire : Décomposition du groupe des difféomorphismes du cercle
Soit α un nombre de densité bornée (par exemple $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ le nombre d'or).
Alors tout $f \in \mathrm{Diff}^\infty_+(T^1)$ (resp. $f \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^1)$) s'écrit de façon unique comme $f = R_\lambda \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in \mathrm{Diff}^\infty_+(T^1, 0)$; (resp. $g \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^1, 0)$), de plus $f \to (\lambda, g)$ est continue dans la C^∞-topologie et même dépend faiblement de façon C^∞ de paramètre (c'est un $\mathcal{L}$-morphisme faible au sens de Sergereart).

Démonstration : Par III.4.1.1, il existe un unique λ tel que $\rho(R_{-\lambda} \circ f) = \alpha$, et alors on applique 6.1. La continuité pour la C^∞ topologie résulte de VII.2.

Pour la dépendance desparamètres variant dans un espace de dimension finie, voir Sergereart [1] et aussi chapitre XIV.

Pour le cas C^ω, la dépendance C^ω de paramètres variant dans un espace analytique de dimension finie voir Arnold [1]. ■

6.3 Corollaire : Tout $f \in \mathrm{Diff}^\infty_+(T)$ (resp. $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^1)$) s'écrit comme le produit de deux commutateurs dans $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^1)$ (resp. $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^1)$) .

Démonstration : Cela résulte de 6.2 et du fait que tout R_α s'écrit dans $PSL(2,\mathbb{R})$ comme un commutateur ($PSL(2,\mathbb{R}) \subset Diff^\omega_+(T^1)$). ∎

Remarque : $D^\infty(T^1)$ (resp. $D^\omega(T^1)$) est égal à son groupe des commutateurs. En effet il suffit que les éléments du centre $C = \{R_p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ s'écrivent comme des commutateurs. Or $C \subset \widetilde{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset D^\omega(T^1)$, où $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ est le revêtement universel de $PSL(2,\mathbb{R}) \subset Diff^\omega_+(T^1)$. Or $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ est égal à son groupe des commutateurs.

7. REMARQUE

La proposition suivante montre en utilisant le théorème VIII.2.8 que la conjecture d'Arnold se réduit à prouver la conjugaison C^1; en effet les nombres de type Roth sont de mesure de Lebesgue pleine par V.4.4.

Proposition : Soit $f \in D^3(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ un nombre de type Roth ; si f est C^1 conjugué à R_α, alors f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{1}{5}$.

Démonstration : L'inégalité de 5 donne

$$|D^2 f^{q_n}|_o = O(\sqrt{q_n})$$

et puisque f est C^1 conjugué à R_α, on a

$$|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o = O(\frac{1}{q_n}) .$$

L'inégalité de Hadamard 2.1 appliquée à $f^{q_n} - Id - q_n\alpha$ donne

$$|Df^{q_n} - 1|_o \leq \sqrt{2|f^{q_n} - Id - q_n\alpha|_o |D^2 f^{q_n}|_o} ,$$

$$= O(q_n^{-\frac{1}{4}})$$

donc par le critère 4.2, f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{1}{5}$.
(En fait en reprenant la démonstration 4.2 b) et en utilisant $|D^2 f^{q_n}|_o = O(\sqrt{q_n})$, on montre que f est $C^{1+\varepsilon}$ conjugué à R_α pour tout $\varepsilon < \frac{1}{3}$ et le théorème VIII.2.8 donne $C^{2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$). ∎

C H A P I T R E X

INVARIANT DE CONJUGAISON C^0 A DES ROTATIONS

Plan :

1. Invariant de C^0-conjugaison, l'invariant K_r .
2. Orbites par conjugaison C^0 .
3. Exemples de Denjoy.
4. Contre exemples de Denjoy de classe C^0 commutant.
5. Continuité et conjugaison C^0.

Commentaire :

Nous introduisons en 1 l'invariant K_o semi-continu supérieurement et tel que $K_o(f) = 0$ si et seulement si f est C^0-conjugué à une rotation. Grâce à cet invariant, on montre en 2 que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ O^0_α est résisuel dans F^0_α. En 3, nous reprenons les contre-exemples C^1 de Denjoy. Nous montrons que pour tout $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ il existe une suite $f_i \in F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$ avec, si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie. Il est à noter que les f_i ont un cantor invariant de mesure de Lebesgue nulle. En 3.9, en suivant Sergereart, nous montrons, pour tout $\varepsilon > 0$, que l'on peut construire des contre-exemples de Denjoy $C^{2-\varepsilon}$, et même $C^{2-\varepsilon}$ proche à R_α.

En 4, nous construisons des contre-exemples de Denjoy C^0 et commutant deux à deux, ce qui a des applications aux feuilletages par plans de T^n : il existe un feuilletage par plan de T^n de classe C^0, ayant un cantor invariant (saturé).

Finallement en 5, nous montrons que l'application réciproque de la bijection Φ^0_α : $g \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1,0) \to g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \in O^0_\alpha$ est continue pour la C^0-topologie. Nous verrons au chapitre suivant qu'en classe C^r ce n'est plus le cas (i.e. elle n'est plus continue pour la C^r-topologie).

Pour la conjecture 3.1, le lecteur se rapportera au chapitre XI.7. Dans le cas C^0, pour la conjugaison des homéomorphismes qui ont un cantor invariant, voir Markeley [1]. On peut aussi montrer 4 en suivant Markeley [1].

I. INVARIANT DE C^0-CONJUGAISON

I.1 Remarque : Soit $0 \leq r \leq \omega$ (entier), et $f \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n)$. On suppose que f est C^r-conjugué à $R_\alpha \in T^n$. Soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n)$. Il existe alors une suite d'entiers (n_i) tendant vers $+\infty$ avec i, tel que $n_i \alpha \to 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$. Si $i \to +\infty$, on a $f^{n_i} = g^{-1} \circ R_{n_i \alpha} \circ g \to Id$ dans la C^r-topologie ($\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ est un groupe topologique).

I.1 L'invariant K_r : Soit $0 \leq r \leq +\infty$ et d_r une métrique définissant la C^r-topologie de $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$. Soit $K_r : \mathrm{Diff}_o^r \to \mathbb{R}_+$, défini par

$$K_r(f) = \inf_{n \geq 1} d_r(f^n, Id)$$

Si $f \in D^r(T^n)$ on pose $K_r(f) = K_r(\pi(f))$ $(\pi(f) = \bar{f})$.

I.3 Remarques : a) Si f est C^r-conjugué à une translation, on a alors $K_r(f) = 0$.

b) $f \in D^r(T^n)$ est C^r conjugué à une translation si et seulement si $\pi(f)$ l'est.

c) Comme $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ est un groupe topologique pour la C^r-topologique, $f \to d_r(f^n, Id) \in \mathbb{R}_+$ est une fonction continue.

d) $K_r : \mathrm{Diff}_o^r(T^n) \to \mathbb{R}_+$ est donc une fonction semi-continue supérieurement pour la C^r-topologie.

e) Il résulte que $K_r^{-1}(0)$ est un G_δ dans $\mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ pour la C^r-topologie.

f) Puisque $K_r \geq 0$, si $f \in \mathrm{Diff}_o^r(T^n)$ est tel que $K_r(f) = 0$, alors K_r est continue en f. En effet $K_r^{-1}[-\infty, a[= K_r^{-1}([0, a[)$ est ouvert.

1.4 Proposition : Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathrm{Diff}_+^0(T^1)$ soit C^0-conjugué (i.e. dans $\mathrm{Diff}_+^0(T^1)$) à une rotation est que $K_0(f) = 0$.

Démonstration : La condition est nécessaire par 1.1. Montrons qu'elle est suffisante. Si $K_0(f) = 0$ alors il existe une suite d'entiers n_i, avec, si $i \to +\infty$, $n_i \to +\infty$ et $d_0(f^{n_i}, Id) \to 0$. Soit $f^{n_i} \to Id$ dans la C^0-topologie ; la suite $\{f^{n_i}\}_i$ est donc équicontinue est la proposition résulte de II.9. ∎

2. ORBITES PAR CONJUGAISON C^0.

Rappelons que nous avons posé, pour $0 \leq r \leq \omega$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F_\alpha^r = \{f \in D^r(T^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

et

$$O_\alpha^r = \{g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \mid g \in D^r(T^1)\}$$

ainsi que si $0 \leq k \leq r$

$$O_\alpha^{r,k} = O_\alpha^k \cap F_\alpha^r .$$

Evidemment

$$O_\alpha^r \subset F_\alpha^r .$$

On a le

2.1 Théorème : Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) est résiduel dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0 (resp. C^1)-topologie.

Démonstration : On a par 1.4

$$O_\alpha^0 = K_0^{-1}(0) \cap F_\alpha^0 \text{ et } O_\alpha^{1,0} = K_0^{-1}(0) \cap F_\alpha^1.$$

Or $K_0^{-1}(0)$ est un G_δ (pour la C^0-topologie) (voir 1.4) et donc O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) est un G_δ dans F_α^0 (resp F_α^1) pour la C^0 (resp C^1)-topologie.

Comme F_α^2 est dense dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0 (resp. C^1)-topologie par III.6.3., on conclut par le théorème de Denjoy (i.e. $F_\alpha^2 = O_\alpha^{2,0}$) que O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) est dense dans F_α^0 (resp. F_α^1) pour la C^0 (resp. C^1)-topologie, et donc O_α^0 (resp. $O_\alpha^{1,0}$) est un G_δ dense dans F_α^0 (resp. F_α^1). ∎

2.2 Rappelons que nous avons posé

$$F^r = D^r(T^1) - \mathrm{Int}\ \rho^{-1}(\mathbb{Q})$$

qui est donc fermé dans $D^r(T^1)$ pour la C^r-topologie. En utilisant III.6.3, par les mêmes démonstrations que pour le théorème précédent, on a la

Proposition : $K_o^{-1}(0) \cap F^o$ (resp. $K_o^{-1}(0) \cap F^1$) est résiduel dans F^o (resp. F^1) pour la C^o (resp. C^1)-topologie.

3. EXEMPLES DE DENJOY

En suivant Denjoy [2], nous allons montrer que $F_\alpha^1 - O_\alpha^{1,o}$ est non seulement non vide pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ mais dense dans F_α^1 pour la C^o-topologie, et dans certains cas dense dans la C^1-topologie. Commençons par une

3.1 Conjecture : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, O_α^∞ est dense F_α^∞ pour la C^∞-topologie.

Cette conjecture est vraie si α est de densité bornée puisque alors

$$O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty \quad \text{par IX 6.1}$$

Nous montrerons en XI.7 qu'elle est vraie pour un ensemble résiduel de nombres de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ satisfait la conjecture 3.1, alors pour tout $1 \leq r \leq +\infty$ O_α^r est dense dans F_α^r pour la C^r-topologie par III.4.4.

3.2 Remarque : Pour tout $r \geq 1$, O_α^r est dense dans $O_\alpha^{r,o}$ pour la C^o-topologie sur F_α^r.
En effet si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \in O_\alpha^{r,o}$ avec $g \in \mathrm{Diff}_+^o(T^1)$, on peut approximer g dans la C^o-topologie par des éléments de $\mathrm{Diff}_+^\omega(T^1)$ et remarquer que $\mathrm{Diff}_+^o(T^1)$ est un groupe topologique.

3.3 Remarque : Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on voit de même que O_α^r est dense dans O_α^o pour la C^o-topologie et aussi que O_α^r est dense dans F_α^r pour la C^o-topologie (on utilise III.4.4 et le théorème de Denjoy).

On a les

3.4 Théorème : Pour tout $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $F^o_\alpha - O^o_\alpha$ est dense dans F^o_α pour la C^o-topologie.

3.5 Théorème : $F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$ est dense dans F^1_α pour la C^o-topologie et, si α satisfait la conjecture 3.1, $F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$ est dense dans F^1_α pour la C^1-topologie.

3.6 Affirmation : Pour $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe une suite $\{f_i \in F^1_\alpha\} \subset \mathrm{Diff}^1_+(T^1)$ tendant vers R_α dans la C^1-topologie quand $i \to +\infty$, et pour chaque i, il existe un cantor de mesure de Lebesgue nulle $K_i \subset T^1$, tel que $f_i(K_i) = K_i$.

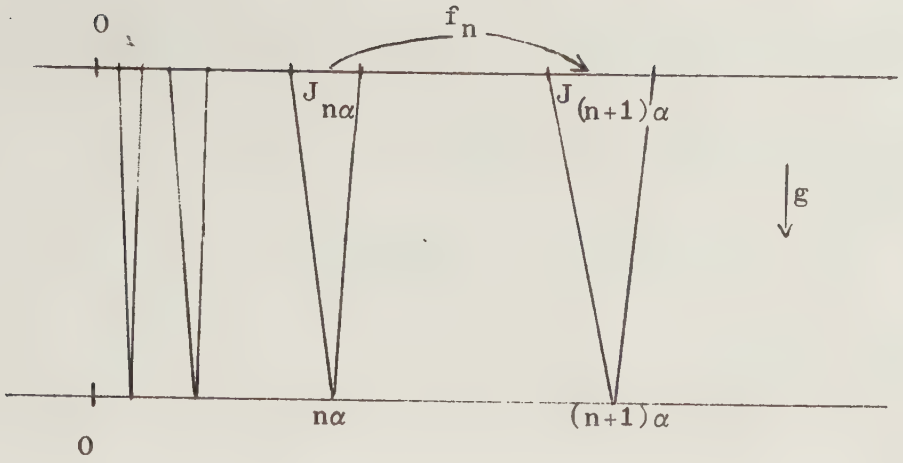
Cette affirmation implique que f_i n'est pas C^o-conjugué à R_α (i.e. $f_i \in F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$).
Commençons par montrer que

3.7 L'affirmation implique les théorèmes 3.4 et 3.5

Par la remarque 3.3, il suffit de montrer que pour tout $g \in O^1_\alpha$, il existe une suite $\{g_i \in F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha\}$ telle que $g_i \to g$ dans la C^1-topologie si $i \to +\infty$. Si l'on écrit $g \in O^1_\alpha$, $g = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ avec $h \in \mathrm{Diff}^1_+(T^1)$ alors $g_i = h^{-1} \circ f_i \circ h$ convient ou $\{f_i\}$ est la suite construite en 3.6. ■

3.8 Preuve de l'affirmation 3.6

Nous suivons Denjoy [2] et aussi l'exposé de Rosenberg [1] d'après Milnor.
Soit $\alpha \in [0,1] - \mathbb{Q}$.
Rappelons que si $f \in D^o(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors il existe $g = \mathrm{Id} + \varphi$ avec $\varphi \in C^o(T^1)$, g continue monotone non décroissante telle que $g \circ f = R_\alpha \circ g$.
Si f n'est pas conjugué à R_α, alors g est constante sur chaque composante connexe d'un ouvert U, dense dans $\mathbb{R}$, et f laisse U invariant ; $\mathbb{R} - U \pmod 1$ est un cantor. Remarquons qu'alors g(U) est un ensemble dénombrable dense invariant par R_α.
On construit d'abord $\mathbb{R} - U \pmod 1$ puis g.



Figure

$$J_{n\alpha+p} = I_n \pmod 1$$

$$f|_{I_n} = f_n : I_n \to I_{n+1} \pmod 1$$

et $g \circ f = R_\alpha \circ g$.

Ensuite U sera alors Int $\bigcup_{n,p} (g^{-1}(n\alpha + p))$ avec $n, p \in \mathbb{Z}$. Puis on détermine f par $g \circ f = R_\alpha \circ g$ (i.e., f envoie $J_{n\alpha} = g^{-1}(n\alpha)$ sur $J_{(n+1)\alpha} = g^{-1}((n+1)\alpha)$); on montrera qu'avec un choix convenable du cantor et de f, on a l'affirmation.

A. CONSTRUCTION D'UN CANTOR

Pour tout $\eta > 0$, il existe une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de réels positifs, telle que

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $\left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| < \eta$ et

$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$.

A.1 Exemple d'une telle suite :

On se donne $\varepsilon > 0$, et on choisit $k > 0$ et $a > 0$. On appelle $S_{k,\varepsilon}(a)$ la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\ell_{|n|} = \frac{a}{(|n|+k)^{1+\varepsilon}} \quad \text{si } n \in \mathbb{Z} .$$

On choisit a pour que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1 ,$$

et on appelle la suite ainsi obtenue $S_{k,\varepsilon}$.

Comme on a pour ε fixé si $n \to \pm\infty$

$$\left|\frac{|n| \pm 1}{|n|}\right|^{1+\varepsilon} = O\left(\frac{1}{|n|+1}\right) ,$$

pour tout $\eta > 0$, il existe k assez grand tel que la suite $S_{k,\varepsilon}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| \leq \eta$$

A.2 Suite de la construction du cantor dans $[0,1]$:

On se donne une suite $S_{k,\varepsilon} = (\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Soit $\alpha \in [0,1] - \mathbb{Q}$ et $\alpha_n = n\alpha \pmod 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Soit $I_n = [b_n , c_n]$ où

$$b_n = \sum_{\{m \mid \alpha_m < \alpha_n\}} \ell_m \quad , \quad c_n = \sum_{\{m \mid \alpha_m \leq \alpha_n\}} \ell_m = b_n + \ell_n$$

$$b_o = 0 \in [0,1] .$$

Les I_n sont ordonnées sur $[0,1]$ de la même façon que les α_n, si $\alpha_n < \alpha_p$ alors $c_n < b_p$, donc les I_n sont tous disjoints et leur réunion est de mesure 1 (elle est donc dense dans $[0,1]$).

A.3 Lemme : Soit D_1 et D_2 deux ensembles denses dans $[0,1]$ (resp. dans $\mathbb{R}$), et soit $f : D_1 \to D_2$ une application surjective non décroissante (resp. strictement croissante sur D_1) ; alors f se prolonge en une fonction monotone non décroissante (resp. strictement croissante), continue de $[0,1]$ (resp. $\mathbb{R}$) sur $[0,1]$ (resp. $\mathbb{R}$).

Démonstration : Il est élémentaire que f se prolonge en une fonction non décroissante (resp. strictement croissante), qui est continue puisque $f(D_1) = D_2$ est dense, et que l'image de toute fonction monotone sur $[0,1]$ non continue évite un intervalle. ■

A.4 Construction de g

Sur $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, considérons l'application $g : I_n \to [0,1]$ définie par $g(I_n) = \{\alpha_n\}$; d'après A_3, g se prolonge en vue de l'application $g : [0,1] \to [0,1]$, continue, monotone non décroissante, et telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue monotone non décroissante par $g(x+p) = g(x)+p$ si $x \in [0,1]$ et $p \in \mathbb{Z}$.

A.5 L'ouvert U

Soit maintenant $J_{n\alpha+p} = g^{-1}(n\alpha+p)$ pour n, et $p \in \mathbb{Z}$.

On a

$$J_{n\alpha+p} = I_n \pmod 1$$

et de plus les intervalles $J_{n\alpha+p}$ sont tous disjoints et d'intérieurs non vide et $U = \bigcup_{n,p} \mathrm{Int}\,(J_{n\alpha+p})$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$, et

$m(\mathbb{R}-U) = 0$ (m = mesure de Lebesgue)

B. CONSTRUCTION D'UN HOMEOMORPHISME

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on choisit un homéomorphisme croissant f_n de $J_{n\alpha}$ sur $J_{(n+1)\alpha}$. On définit f_n sur $J_{n\alpha+p}$ par

$$f_n|J_{n\alpha+p} = f_n|J_{n\alpha} + p \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} \text{ (i.e. } f_n(x+p) = f(x)+p).$$

On a ainsi défini une application f de $\bigcup_{n,p} J_{n\alpha+p}$ dans $\mathbb{R}$ qui est strictement monotone; donc par le lemme A.3, f se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. Evidemment on a $f(x)+1 = f(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f \in D^0(T^1)$. On a $\rho(f) = \alpha$ (i.e. $f \in F^0_\alpha$).

En effet on a par construction $g \circ f = R_\alpha \circ g$ (où g est construit en A.4) puisque f et g sont continues et que cette égalité est vraie sur $\bigcup_{n,p} J_{n\alpha+p}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. Or ceci implique $\rho(f) = \alpha$ par II.2.10.

Soit $\bar{f}$ l'homéomorphisme induit par f sur T^1. Si $U = \mathrm{Int}(\bigcup_{n,p} J_{n\alpha+p})$ et si $\pi : \mathbb{R} \to T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la projection canonique, posons

$$\bar{K} = \pi(\mathbb{R} - U).$$

Comme $f(U) = U$ par construction, $\bar{f}$ laisse invariant $\bar{K}$ qui est d'ailleurs le cantor minimal invariant par $\bar{f}$, et $\bar{K} \neq T^1$ $m(\bar{K}) = 0$ par construction, donc $f \in F^o_\alpha - 0^o_\alpha$ (ou ce qui est équivalent à $\bar{f} \in F^o_\alpha - 0^o_\alpha$).

C. CONSTRUCTION D'UN DIFFEOMORPHISME C^1

Rappelons que f_n est un homéomorphisme croissant de $J_{n\alpha}$ sur $J_{(n+1)\alpha}$ et on a

$$f_n|J_{n\alpha+p} = f_n|J_{n\alpha} + p \quad \text{si} \quad p \in \mathbb{Z} .$$

Si f_n est C^1 alors on a $|Df_n - 1|_{J_{n\alpha+p}} = |Df_n - 1|_{I_n} = \sup_{x \in I_n} |Df_n(x) - 1|$.

Notons $\partial(J_{n\alpha+p})$ les extrémités de l'intervalle $J_{n\alpha+p}$.

Proposition : Si on choisit f_n un difféomorphisme C^1 tel que $Df_n(x) = 1$ si $x \in \partial(J_{n\alpha+p})$ et que $|Df_n - 1|_{I_n}$ converge vers 1, si $n \to \pm\infty$, alors l'homéomorphisme f construit en B est un difféomorphisme de classe C^1 (soit $f \in F^1_\alpha - 0^{1,o}_\alpha$).

Démonstration : Soit f l'homéomorphisme construit ainsi. f est dérivable sur $U = \text{Int} \bigcup_{n,p} J_{n\alpha+p}$, et $Df|_U$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction $h \in \mathcal{C}^o(T^1)$, avec $h|_U = Df|_U$ et $h = 1$ sur $\mathbb{R} - U$. On a $h > 0$.

Montrons que f est absolument continue. f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$, et donc sur tout intervalle compact f est à variation bornée, pour voir que f est absolument continue il suffit de voir que f envoit les ensembles de mesure de Lebesgue nulle sur des ensembles de mesure de Lebesgue nulle . On a $\mathbb{R} - U$ est de mesure de Lebesgue nulle par le choix $\sum_n \ell_n = 1$, et ainsi, par construction

$$f : \mathbb{R} - U \to \mathbb{R} - U$$

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $m(A) = 0$; on a

$$A = (A \cap (\mathbb{R}-U)) \cup (A \cap U)$$

et comme f est C^1 sur U

$$m(f(A)) = m(f(A \cap \mathbb{R}-U)) + m(f(A \cap U)) = 0 ;$$

donc f est bien absolument continue.
On a donc

$$f(x) = f(0) + \int_0^x Df(t)dt$$

Comme D f(t) = h(t) > 0 m-presque partout (puisque $m(\mathbb{R}- U) = 0$), on a donc

$$f(x) = f(0) + \int_0^x h(t)dt ,$$

et puisque $h \in C^0(T^1)$ et $h > 0$, on a bien $f \in D^1(T^1)$ et donc
$f \in F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$. ∎

D. PREUVE DE L'AFFIRMATION

Pour tout $\eta > 0$, on construit $f \in F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$ tel que $|f - R_\alpha|_{C^1} \leq 2\eta$ et l'affirmation résulte.

On choisit le cantor comme en A.1, avec la suite $S_{k,\varepsilon}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1| \leq \eta$.

Choisissons f_n comme en B. Pour cela on définit Df_n sur I_n (on rappelle $Df_n|J_{n\alpha+p} = Df_n|I_n$ puisque Df_n est $\mathbb{Z}$-périodique).

Soit pour $x \in I_n$

$$Df_n(x) = 1 + k_n(x - b_n)(c_n - x).$$

On a $c_n - b_n = \ell_n$.

On a f_n sur I_n par intégration, et puisque $f_n : I_n \to I_{n+1} (\text{mod.}1)$ on a la condition

$$\int_{I_n} Df_n(x)dx = \ell_{n+1}$$

d'où

$$k_n = \frac{1}{6} \left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right) \frac{1}{\ell_n^2} .$$

Il suit que :

$$Df_n(x) - 1 = \frac{1}{6}\left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right) \frac{(x-b_n)(c_n-x)}{\ell_n^2} \quad .$$

On a donc :

$$|Df_n - 1|_{I_n} \leq \left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| .$$

Comme $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$, on a par la proposition de C l'homéomorphisme ainsi construit est de classe C^1 (i.e. $f \in F_\alpha^1 - 0_\alpha^{1,o}$). Il nous reste à montrer que $|f - R_\alpha|_{C^1} = |f - R_\alpha|_o + |Df - 1|_o \leq 2\eta$.

Comme $S_{k,\varepsilon}$ est choisie telle que $\left|\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right| \leq \eta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$|Df - 1|_o \leq \eta$$

et l'affirmation résulte du

Lemme : Soit $f \in F_\alpha^1$ avec $|Df - DR_\alpha|_o \leq \eta$; alors $|f - R_\alpha|_o \leq \eta$.

Démonstration : En effet d'après II.2.4, il existe $x_o \in [0,1]$ tel que $f(x_o) = R_\alpha(x_o)$; sur $[0,1]$ par le théorème de la moyenne, on a :

$$|(f - R_\alpha)(x) - (f - R_\alpha)(x_o)| \leq \eta |x - x_o| \leq \eta$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - R_\alpha(x)| \leq \eta ,$$

soit

$$|f - R_\alpha|_o \leq \eta. \qquad \blacksquare$$

3.9 Contre-exemples de Denjoy $C^{2-\varepsilon}$

La proposition est d'après F. Sergeraert (la démonstration que je propose est peu différente de celle de Sergeraert).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $k > 1$ et soit $S_{k,\varepsilon} = (\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite construite en 3.8 A.1. La suite ℓ_n dépend de k, soit $\ell_n(k)$ (et de ε fixé).
On a pour $\varepsilon > 0$ fixé et si $k \to +\infty$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\ell_{n+1}(k)}{\ell_n(k)} - 1 \right| \to 0.$$

Le f construit en 3.8.D dépend de ε et de k.

3.9.1 Proposition : Pour tout $k \geq 1$, le difféomorphisme $f \in F_\alpha^1 - 0_\alpha^{1,o}$ construit en 3.8.D est tel que Df est hölderienne de rapport $\beta \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$

Soit par définition : $Df \in Lip_\beta(T^1)$

$$(\text{i.e. } f \in F_\alpha^{1+\frac{1}{1+\varepsilon}} - 0_\alpha^o).$$

Démonstration : On rappelle que, pour $0 \leq \beta \leq 1$, $\varphi \in Lip_\beta(T^1)$ si

$$|\varphi|_\beta = \sup_{x\neq y} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^\beta} \right| < +\infty .$$

On a :

$$Df(x) - 1 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{+N} h_n(x)$$

avec

$$h_n(x) = \begin{cases} Df_n(x) & \text{si } x \in I_n \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] - I_n \\ h_n(x+p) = h_n(x) & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } p \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

On a

$$|Dh_n(x)| \leq \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell} - 1 \right| \frac{1}{\ell_n}$$

et on voit que

$$|h_n|_\beta \leq \sup_{x\neq y} \left| \frac{h_n(x) - h_n(y)}{|x-y|^\beta} \right| \leq \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| \frac{1}{\ell_n} \ell_n^{1-\beta} .$$

Or

$$\ell_n = \frac{a}{(|n|+k)^{1+\varepsilon}}$$

avec

$$(1)\quad \frac{1}{a} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(|n|+k)^{1+\varepsilon}}$$

donc

$$(2)\quad \sup_{k \geq 1} \left(\frac{1}{a} \right) < +\infty$$

et aussi si $n \to \pm\infty$,

$$(3)\quad |h_n|_\beta \leq \left| \left(\frac{|1+n|+k}{|n|+k} \right)^{1+\varepsilon} - 1 \right| . \frac{(|n|+k)^{(1+\varepsilon)\beta}}{a_k^\beta} =$$

$$= O\left(\frac{(|n|+k^{(1+\varepsilon)\beta}}{(|n|+k)a_k^\beta} \right) .$$

le O ne dépend que de ε.

Si $\beta \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$, on a :

$$(4)\quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|_\beta < +\infty$$

et même

$$(5)\quad \sup_{k \geq 1} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|_\beta < +\infty .$$

On a bien $Df - 1 \in Lip_\beta(T^1)$, puisque $Df - 1$ est limite uniforme de $\sum_{-N}^{+N} h_n \in Lip_\beta(T^1)$ et on a

$$(6)\quad \left| \sum_{-N}^{N} h_n \right|_\beta \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|_\beta < +\infty . \quad \blacksquare$$

3.9.2 Remarque : Pour $\varepsilon > 0$ fixé $f(k)$ dépend de k et on a par (5) et (6)

$$\sup_{k\geq 1} |Df(k)|^{1/1+\varepsilon} < +\infty . \tag{7}$$

Il résulte que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tout $\varepsilon > 0$, tout $\beta < \frac{1}{1+\varepsilon}$, et tout voisinage $V_{R_\alpha}^{1+\beta}$ de R_α dans $D^{1+\frac{1}{1+\varepsilon}}(T^1)$ dans la $C^{1+\beta}$-topologie, il existe $f \in D^{1+\frac{1}{1+\varepsilon}}(T^1)$, $\rho(f) = \alpha$ avec $f \in V_{R_\alpha}^{1+\beta}$ mais $f \notin O_\alpha^o$.

(Voir VIII.2.7.3. en utilisant l'inégalité (7) et si $k \to +\infty$, $f(k) \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie).

3.10 Remarque : Il n'est pas difficile de voir que tous les $f \in F_\alpha^1 - O_\alpha^{1,o}$ construits en 3.8 de A à C sont C^o conjugués entre eux, et même sont conjugués par homéomorphisme h, avec h et h^{-1} absolument continus (par le même raisonnement qu'en 3.8.C). Markeley [1] a étudié le problème de la C^o-conjugaison des contre exemples de Denjoy : soit $f_1 \in \mathrm{Diff}_+^o(T^1)$ avec $\rho(f_1) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et f_1 a un cantor minimal $F_1 \neq \emptyset$ invariant. Soit $g_1 : T^1 \to T^1$ continue monotone, $g_1(0) = 0$, avec

$$g_1 \circ f_1 = R_\alpha \circ g_1$$

Soit $g_1(T^1 - F_1) = D_1$, qui est un ensemble dénombrable invariant par R_α.

Le nombre d'orbite de l'action de R_α sur D_1 est soit fini soit dénombrable (voir Denjoy [2]).

Dans l'exemple 3.8. A à C, nous avons construit D_1 comme l'orbite de 0 par R_α, il y a donc une orbite par R_α. Markeley introduit l'invariant suivant. Soit $f_2 \in \mathrm{Diff}_+^o(T^1)$, $\rho(f_2) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et f_2 à F_2 comme cantor minimal invariant.

Soit $g_2(T^1 - F_2) = D_2$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f_1 soit C^o-conjugué à f_2 est que $D_1 = D_2$.

Problème : Soit f_1 et f_2 comme ci-dessus mais de classe C^1, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f_1 soit C^1 conjugué à f_2 ?

4. CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY DE CLASSE C^0 COMMUTANT

On a la proposition suivante qui résulte aussi de Markeley [1].

Proposition : Soit n un entier $n \geq \mathbb{Z}$, et soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n nombres tels que $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soient indépendants sur $\mathbb{Q}$ (i.e. mod 1, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ soit libre dans le $\mathbb{Z}$-module T^1), alors il existe $f_i \in F^0_{\alpha_i} - 0^0_{\alpha_i}$ pour $1 \leq i \leq n$ vérifiant $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$.

Démonstration : On construit facilement une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue monotone non décroissante telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) + 1 = g(x+1)$ et pour tout $p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ alors $J_p = g^{-1}(p_1\alpha_1 + \ldots + p_n\alpha_n + p_{n+1})$ est un intervalle d'intérieur non vide, et aussi tous les $J_{(p_1, \ldots, p_{n+1})}$ sont disjoints (deux à deux) et $U = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}^{n+1}} \text{Int } J_p$ est ouvert dense dans $\mathbb{R}$.

On a évidemment :

$$J_{(p_1, \ldots, p_n, 0)} + p_{n+1} = J_{(p_1, \ldots, p_{n+1})}.$$

Soit $K = \mathbb{R} - U$, K est invariant par R_q si $q \in \mathbb{Z}$ et $\pi(K) = \bar{K}$ est un cantor dans T^1.

On construit les f_i par récurrence.

On construit f_i comme 3.8.B avec cette différence que pour tout $(p_1, \ldots, p_n, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, on choisit un homéomorphisme croissant de $J_{(p_1, \ldots, p_n, 0)}$ sur $J_{(p_1+1, \ldots, p_n, 0)}$. On détermine f_1 sur U par $f(x+p_{n+1}) = p_{n+1} + f(x)$, $p_{n+1} \in \mathbb{Z}$, f_1 se prolonge en $f_1 \in D^0(T^1)$ et $g \circ f_1 = R_{\alpha_1} \circ g$ d'où il résulte que $\rho(f_1) = \alpha_1$ et si $\bar{f}_1 = \pi(f_1)$ on a $\bar{f}_1(\bar{K}) = \bar{K} \subset T^1$ et donc $f_1 \in F^0_{\alpha_1} - 0^0_{\alpha_1}$.

Supposons par récurrence qu'on ait construit pour $1 \leq k \leq n$, $f_1, \ldots, f_k$

satisfaisant la proposition. On construit f_{k+1} ainsi :
pour tout $(0,.,0,p_{k+1},\ldots,p_n,0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. On choisit un homéomorphisme croissant de $J_{(0,\ldots,0,p_{k+1},\ldots,p_n,0)}$ sur $J_{(0\ldots,p_{k+1}+1,\ldots,p_n,0)}$.
On détermine f_{k+1} sur $\bigcup_{(0,.,0,p_{k+1},\ldots,p_{n+1})} J_p$ par la relation

$$f_{k+1}(x+p_{n+1}) = p_{n+1} + f_{k+1}(x),\ p_{n+1} \in \mathbb{Z}\ .$$

Ensuite , on détermine f_{k+1} sur $J_{(p_1,\ldots,p_{k+1},\ldots,p_{n+1})}$ par la relation

$$f_{k+1}(x) = f_1^{p_1} \circ \ldots \circ f_k^{p_k} \circ f_{k+1} \circ f_1^{-p_k} \circ \ldots \circ f_k^{-p_1}(x)$$

$$x \in J_{(p_1,\ldots,p_{k+1},\ldots,p_{n+1})}\ .$$

On a ainsi défini f_{k+1} sur U strictement croissante, f_{k+1} se prolonge en $f_{k+1} \in D^0(T^1)$.

On a $g \circ f_{k+1} = R_{\alpha_{k+1}} \circ g$ et donc

$$\rho(f_{k+1}) = \alpha_{k+1} \quad \text{par II.2.10 .}$$

On a aussi $f_i \circ f_{k+1} = f_{k+1} \circ f_i$ pour $1 \le i \le k+1$ par construction (c'est vrai sur U qui est dense).
Ceci achève la récurrence . ∎

5. CONTINUITE ET CONJUGAISON C^0

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Soit $f \in F_\alpha^0$, et μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur T^1 ,(voir II.8).
Soit par II.7.1 , il existe $g = Id + \psi$ avec $\psi \in C^0(T^1)$, g monotone non décroissante vérifiant $g \circ f = R_\alpha \circ g$. Si on impose que $\mu(\psi) = \int_{T^1} \psi d\mu = 0$ alors g est unique.
Soit ψ_α l'application qui a $f \in F_\alpha^0$ associe $\psi_\alpha(f) \in C^0(T^1)$, $\psi_\alpha(f) = \psi$ étant l'unique ψ tel que $\int_{T^1} \psi\, d\mu = 0$, et telle que si $g = Id + \psi$ alors

on a $g \circ f = R_\alpha \circ f$.

On a la

5.2 Proposition : $\psi_\alpha : F^o_\alpha \to C^o(T^1)$ est continue pour la C^o-topologie.

Démonstration : On a par IV.5.2

$$\psi_\alpha(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n-1} (f^i - i\alpha - Id) = S_n(f)$$

$$S_n(f) = \psi - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=o}^{n} \psi \circ f^i \right)$$

donc

$$|\psi_\alpha(f) - S_n(f)|_o \leq \left|\frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n-1} \psi \circ f^i\right|_o$$

Or pour n fixé, $f \to S_n(f)$ continue dans la C^o-topologie. Soit q_n les dénominateurs des réduites de α. Puisque $g = Id + \psi$ est monotone non décroissante, on a ψ de variation bornée et $Var(\psi) \leq 2$.
Par l'inégalité de Denjoy-Koksma, VI.3, on a, puisque $\int_{T^1} \psi \, d\mu = 0$,

$$|\psi_\alpha(f) - S_{q_n}(f)|_o \leq \frac{1}{q_n} Var(\psi) \leq \frac{2}{q_n} .$$

Si $n \to +\infty$, $q_n \to +\infty$, $\psi_\alpha(f)$ est limite uniforme des applications continues $f \to S_{q_n}(f)$ pour la C^o-topologie, donc $f \to \psi_\alpha(f)$ est continue. ∎

Rappelons que si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\Phi^o_\alpha : D^o(T^1, 0) \to O^o_\alpha$ avec $\Phi^o_\alpha(g) = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, et $D^o(T^1, 0) = \{g \in D^o(T^1) \mid g(0) = 0\}$; alors Φ^o_α est une application continue pour la C^o-topologie. C'est une bijection d'après II.3.
Soit $(\Phi^o_\alpha)^{-1}$ la bijection réciproque de Φ^o_α.

5.2 Proposition : $(\Phi^o_\alpha)^{-1} : O^o_\alpha \to D^o(T^1, 0)$ est continue pour la C^o-topologie.

Démonstration : Soit $H : D^o(T^1) \to D^1(T^1, 0)$ l'application continue qui a $g \in D^o(T^1) \to g - g(o)$ alors on a $(\Phi^o_\alpha)^{-1} = H \circ \psi_\alpha + Id$ avec ψ_α est continue par 5.1. ∎

5.3 Remarque : Nous verrons au chapitre suivant (XI.3) qu'en classe C^r, $+\infty > r \geq 1$, que la bijection réciproque Φ_α^r n'est pas continue pour la C^r-topologie.

C H A P I T R E X I

CATEGORIE DE BAIRE DES ORBITES O_α^r DANS LES FERMES F_α^r.

Plan :

1. Les difféomorphismes de PSL(2,$\mathbb{R}$) .

2. Revêtements finis.

3. Construction d'une suite de difféomorphismes.
   - 3.1 Construction de la suite.
   - 3.2 Lemme.
   - 3.3 Lemme.
   - 3.4 Cas général.
   - 3.5 α, un nombre de Liouville.
   - 3.6 α non de type constant.

4. Catégorie de Baire des orbites.

5. Résultats positifs sur les orbites.
   - 5.1 Rappel.
   - 5.2 Corollaire.
   - 5.3 Discussion.

6. Problème.

7. Conjecture.

Commentaire :

Les résultats principaux de ce chapitre se trouvent en 4. On montre que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et tout $1 \leq r < +\infty$, O_α^r est maigre dans F_α^r.

On montre aussi que, si α est un nombre de Liouville, O_α^∞ est maigre dans F_α^∞, et si α n'est pas de type constant, $O_\alpha^{r,r-1} \cap \overline{O}_\alpha^r$ est maigre dans $\overline{O}_\alpha^r$.

Un sous-espace maigre d'un espace de Baire peut être néanmoins dense (exemple $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) . C'est l'objet de la conjecture en 7, à laquelle

nous donnons un réponse partielle.Notons que la famille de difféomorphismes de $PSL(2,\mathbb{R})$ intervient seulement par la proposition 1.1. Les suites construites en 3.4 montrent que si $r \geq 1$ et si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, la bijection continue pour la C^r-topologie

$$g \in D^r(T^1,0) \longrightarrow \Phi_\alpha^r(g) = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \in O_\alpha^r$$

n'est pas un homéomorphisme sur son image (i.e. la bijection réciproque n'est pas continue pour la C^r-topologie).

Note : Un ouvert C^k dans un sous-espace de $D^\infty(T^1)$ veut dire un ouvert induit sur ce sous-espace par la C^k-topologie.

***

1. LES DIFFEOMORPHISMES DE PSL(2,$\mathbb{R}$).

$PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{-1,+1\}$ agit fidèlement sur $D^2 = \{z \mid |z| \leq 1\}$ par $z \mapsto e^{2\pi i\lambda} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et $|a| < 1$. C'est même le groupe des transformations biholomorphes de Int D^2.
Chaque élément définit sur $S^1 = \partial D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ un difféomorphisme C^ω (isotope à l'Id) de S^1 ; soit $PSL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$.

1.1 Proposition : Soit f un difféomorphisme de PSL(2,$\mathbb{R}$) qui n'a pas de point fixe sur S^1 ($\rho(f) \neq 0 \in S^1$), alors f est C^ω-conjugué à une rotation.

Démonstration : Si $f(z) = e^{2\pi i\lambda} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, et $a \neq 0$, f a deux points fixes sur $\mathbb{C}$, a_1 et a_2, et on voit que $|a_1||a_2| = 1$; si f n'a pas de point fixe sur S^1, on appelle a_1 l'unique point fixe avec $|a_1| < 1$.
f est alors conjugué sur D^2 dans PSL(2,$\mathbb{R}$) à une rotation de D^2 :
$\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} \circ f \circ \frac{z+a_1}{1+a_1 z}$ est une rotation $z \to \beta z$ avec $\beta = \frac{df}{dz}(a_1)$ ($|\beta| = 1$). ∎

Supposons que $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ($a \in \mathbb{R}$). $a \mapsto \frac{z-a}{1-az}$ définit sur S^1 une famille C^ω de difféomorphismes, qui est l'identité pour $a = 0$, et qui pour $a \neq 0$ ont deux points fixes $z = \pm 1$ sur S^1.

1.2 Soit $f_a = \mathrm{Id} + \varphi_a \in D^\omega(T^1)$ cette famille que l'on remonte à $\mathbb{R}$. On suppose f_a choisi tel que, si $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\rho(f_a) = 0$. Soit $\varphi_a(0) = 0$.
Si on relève $e^{2\pi i\lambda} \frac{z-a}{1-az}$, on obtient $R_\lambda \circ f_a$.

1.3 On a donc : $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to f_a \in D^\omega(T^1)$ est une famille C^ω, telle que $f_0 = \mathrm{Id}$ et vérifiant, si $\rho(R_\lambda \circ f_a) \notin \mathbb{Z}$, $R_\lambda \circ f_a$ est C^ω-conjugué à R_α ($\alpha = \rho(R_\lambda \circ f_a)$).

1.4 Lemme : Pour tout entier $0 \leq r < +\infty$, il existe une constante $C_r > 0$ telle que

$$\frac{1}{C_r} |a| \leq |D^r \varphi_a|_0 \leq C_r |a| .$$

Démonstration : $a \to \frac{z-\mathrm{tha}}{1-\mathrm{tha}\, z}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphisme de S^1.

Il/en résulte que $\frac{\partial}{\partial a}(f_a)|_{a=0}$ est le générateur infinitésimal de ce groupe à un paramètre, donc $\frac{\partial \varphi_a}{\partial a}\Big|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a} f_a|_{a=0}$ est une fonction dans $C^\omega(T^1)$, non constante (puisqu'elle s'annule). Il/en résulte que $\frac{\partial}{\partial a}(D^r\varphi_a)|_{a\neq 0}$ est une fonction non nulle de $C^\omega(T^1)$.

Pour $0 \leq r < +\infty$, on a $D^r\varphi_o = 0$.

Si $a \to 0$, on a $\lim \left|\frac{1}{a} D^r\varphi_a\right|_o \neq 0$.

Si $a \neq 0$, on a $\left|\frac{1}{a} D^r\varphi_a\right|_o \neq 0$ pour $0 \leq r < +\infty$.

Il/en résulte pour $0 \leq r < +\infty$, qu'il existe $\frac{1}{C_r}$ tel que $|D^r\varphi_a|_o \geq \frac{1}{C_r}|a|$ pour $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

L'inégalité dans l'autre sens résulte de la formule de la moyenne

$$|D^r\varphi_a(x)| = |D^r\varphi_a(x) - D^r\varphi_o(x)| \leq \left(\operatorname*{Max}_{\substack{a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ x\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial}{\partial a} D^r\varphi_a(x)\right| \right) . |a| \quad . \quad . \quad \blacksquare$$

2. REVETEMENTS FINIS.

Soit $q \in \mathbb{N}$, et $h_q(x) = qx$, h_q est l'homothétie de rapport q, $h_q \in \mathrm{Diff}^\omega(\mathbb{R})$ $(q \neq 0)$.

2.1 On a l'homomorphisme de groupe ou revêtement fini d'ordre q pour $0 \leq r \leq \omega$ défini par

$$f \in D^r(T^1) \longrightarrow \tilde{f} = h_q^{-1} \circ f \circ h_q \in D^r(T^1) \quad .$$

Si $f \in D^r(T^1)$, $f = Id + \varphi$,

$$\tilde{f}(x) = x + \frac{1}{q}\varphi(qx) \quad .$$

On a les propriétés suivantes

2.2 $\rho(h_q^{-1} \circ R_p \circ f \circ h_q) = \frac{\rho(f)}{q} + \frac{p}{q}$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

2.3 Si f est C^r-conjugué à R_α, alors $h_q^{-1} \circ R_p \circ f \circ h_q$ est C^r-conjugué à $R_{\alpha/q + p/q}$.

2.4 Si $\rho(f) = 0$ et $f \neq Id$, alors $(h_q^{-1} \circ (R_p \circ f) \circ h_q)^q \neq R_p$.

Démonstration :

2.2 résulte de ce que, si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{(h_q^{-1} \circ R_p \circ f \circ h_q)^n - Id}{n} = \frac{p}{q} + \frac{(f^n - Id) \circ h_q}{qn}$$

donc, si $n \to +\infty$, $\frac{(f^n - Id) \circ h_q}{qn} \to \frac{\rho(f)}{n}$.

2.3 résulte de ce que, si $f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$ avec $g \in D^r(T^1)$, alors $h_q^{-1} \circ R_p \circ f \circ h_q = \tilde{g}^{-1} \circ R_{p/q + \alpha/q} \circ \tilde{g}$, avec $\tilde{g} = h_q^{-1} \circ g \circ h_q \in D^r(T^1)$ (par 2.1).

2.4 se prouve par l'absurde : si $(h_q^{-1} \circ R_p \circ f \circ h_q)^q = R_p$, alors on a $R_{pq} \circ f^q = R_{pq}$, soit $f^q = Id$; mais comme $\rho(f) = 0$ avec $f \neq Id$, f a un point fixe ; il en résulte que $f^q \neq Id$ pour tout $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, d'où une contradiction.

2.5 Rappelons que nous avons posé $O^r = \{f \in D^r(T^1) \mid f$ est C^r-conjugué à une rotation$\}$.
$\overline{O}^r$ est l'adhérence de O^r dans la C^r-topologie.

Proposition : Pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ donné, il existe une application continue Φ pour la C^∞-topologie, $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \Phi(a) \in \overline{O}^\infty$, telle que pour tout $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\Phi(a) \in D^\omega(T^1)$, $\rho(\Phi(a)) = p/q$, avec, si $a = 0$, $\Phi(0) = R_{p/q}$. Si $a \neq 0$, $\Phi(a)$ est non périodique (i.e. sur T^1, $\Phi(a)$ a un nombre fini de points périodiques).

Démonstration : Soit f_a défini en 1.2, et soit le chemin C^ω, $a \to \tilde{f}_a = h_q^{-1} \circ R_p \circ f_a \circ h_q \in D^\omega(T^1)$.
Soit $\lambda_{p_+/q}(a)$ l'unique élément de $\mathbb{R}$ tel que $R_{\lambda_{p_+/q}(a)} \circ \tilde{f}_a \in F^\omega_{p_+/q}$ (i.e. les semi-stables en avant).
Le chemin $a \to \Phi(a) = R_{\lambda_{p_+/q}(a)} \circ \tilde{f}_a \in F^\omega_{p_+/q}$ est continu dans la C^∞-topologie par III.4.4.
Montrons qu'il satisfait les propriétés de l'affirmation.
On a $\Phi(0) = R_{p/q}$. D'après 2.4, si $a \neq 0$, $\Phi(a)$ sur T^1 a un nombre fini de points périodiques.
Il reste à voir que $\Phi(a) \in \overline{O}^\infty$. Or pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit, cf. III.2.4, $R_\lambda \circ \Phi(a) \in O^\omega$ par 2.3, car si $\rho(R_\lambda \circ f_a) \notin \mathbb{Z}$, alors $R_\lambda \circ f_a \in O^\omega$ par 1.1. ■

3. CONSTRUCTION D'UNE SUITE DE DIFFEOMORPHISMES.

Pour $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, nous allons construire une suite de difféomorphismes $f_i \in F_\alpha^\omega$, f_i est C^ω-conjugué à R_α, $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$ tel que, si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie.

3.1 Construction de la suite.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3.1.1 Soient f_a, défini en 1.2, et q_i une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, lorsque $i \to +\infty$. Nous allons choisir $a_i \to 0$ $(0 < a_i \leq 1/2)$ si $i \to +\infty$, choix dépendant des approximations de α par des rationnels.

On pose

3.1.2
$$f_i = h_{q_i}^{-1} \circ f_{q_i} \circ h_{q_i} + \alpha + \lambda_i$$

$$\text{i.e.} \quad \left(f_i(x) = x + \frac{1}{q_i}\, \varphi_{a_i}(q_i x) + \alpha + \lambda_i\right) .$$

3.1.3 On choisit λ_i l'unique élément de $\mathbb{R}$ tel que

$$\rho(f_i) = \alpha .$$

3.1.4 On a $f_i \in D^\omega(T^1)$ et, par 1.1 et 2.3, $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$ avec $g_i \in D^\omega(T^1, 0)$.

3.2 Lemme : Si quand $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$ (avec $0 < a_i \leq 1/2$), alors, quand $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^0-topologie.

Démonstration : Il suffit de voir que, lorsque $i \to +\infty$, $\lambda_i \to 0$. Or ceci résulte de III.4.2.1.

On peut le voir aussi de la façon suivante. Par II.2.4, pour tout i il existe un $x_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_i(x_i) = R_\alpha(x_i) .$$

Soit
$$|\lambda_i| \leq \frac{1}{q_i} |\varphi_{a_i}(x_i)| \leq \frac{1}{q_i} |\varphi_{a_i}|_o \leq \frac{C^{te}}{q_i} ,$$

donc, quand $i \to +\infty$, comme $q_i \to +\infty$,

$$|\lambda_i| \to 0 . \quad \blacksquare$$

3.3 Lemme : On a, pour tout i, $g_i \circ R_{p_i/q_i} \circ g_i = R_{p_i/q_i}$.

Démonstration : Cela résulte de 2.3. ∎

3.4 Cas général.

Soit $1 \leq r < +\infty$ un entier donné. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Par Dirichlet V.6.1, soit une suite $p_i/q_i \in \mathbb{Q}$, avec $q_i \to \infty$, si $i \to +\infty$ ($q_i > 2$) et vérifiant $|\alpha - p_i/q_i| < 1/q_i^2$.
On se donne $0 < \varepsilon < 1$. On choisit alors

$$a_i = \frac{1}{q_i^{r-1+\varepsilon}} \quad .$$

Soit (f_i) la suite construite en 3.1. On a $\rho(f_i) = \alpha$.

3.4.1 Lemme : Si $i \to +\infty$, alors $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie.

Démonstration : Pour $r = 0$, c'est le lemme 3.3.

Par 1.4 on a, si $i \leq k \leq r$, lorsque $i \to +\infty$,

$$\left| D^k f_i - D^k R_\alpha \right|_o \leq \frac{C_k}{q_i} \frac{|q_i|^k}{q_i^{r-1+\varepsilon}} \leq \frac{C_k}{q_i^{r+\varepsilon-k}} \leq \frac{C_k}{q_i^{\varepsilon}} \quad .$$

Comme $0 < \varepsilon$, si $i \to +\infty$, $\left| D^k f_i - D^k R_\alpha \right|_o \to 0$ pour tout $k \leq r$. ∎
Par 3.1.4, $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$, avec $g_i \in D^\omega(T^1, 0)$.
Posons, si $g \in D^r(T^1)$, $r \geq 1$,

$$\|g\|_r = |D\, g|_{C^{r-1}} + |D\, g^{-1}|_o \quad .$$

La proposition suivante affirme que g_i diverge dans le groupe $D^r(T^1)$.

3.4.2 Proposition : Si $i \to +\infty$, $\|g_i\|_r \to +\infty$ (où $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$).

Démonstration : On a par 3.3

$$* \qquad f_i - R_{p_i/q_i} = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1} - g_i \circ R_{p_i/q_i} \circ g_i^{-1} \quad .$$

Soit, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha - \frac{p_i}{q_i} + \lambda_i + \frac{1}{q_i} \varphi_{a_i}(q_i x) = g_i(\alpha + g_i^{-1}(x)) - g_i\left(\frac{p_i}{q_i} + g_i^{-1}(x)\right) \quad .$$

On démontre la proposition par l'absurde. Supposons, pour tout i, $\|g_i\|_r \leq A < +\infty$.

Cas r = 1. En appliquant la formule de la moyenne au deuxième membre de *,

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i} + \lambda_i + \frac{1}{q_i}\varphi_{a_i}(q_i x)\right| \leq A\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq A\,\frac{1}{q_i^2} \quad ,$$

donc

$$M_i = \operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}} \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i} + \lambda_i + \frac{1}{q_i}\varphi_{a_i}(x)\right| \leq A\,\frac{1}{q_i^2} \quad .$$

On utilise le lemme trivial suivant.

Lemme : Soit $\varphi \in C^0(T^1)$ avec $x_o \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_o) = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}} |\lambda + \varphi(x)| \geq 1/2\ |\varphi|_o$.

Il suit du lemme que $M_i \geq \frac{1}{2q_i}\ |\varphi_{a_i}|_o$ (puisque, pour tout a, $\varphi_a(x)$ s'annule). Par 1.4 on a

$$\frac{1}{2C_o q_i}\ |a_i| \leq M_i \quad .$$

Soit, puisque $a_i = \frac{1}{q_i^{\varepsilon}}$,

$$\frac{1}{2C_o}\,\frac{1}{q_i^{1+\varepsilon}} \leq M_i \quad .$$

Or $M_i \leq A\,\frac{1}{q_i^2}$. On doit avoir $\frac{1}{2C_o q_i^{1+\varepsilon}} \leq A\,\frac{1}{q_i^2}$, avec $q_i \to +\infty$ si $i \to +\infty$. Ce qui n'est pas possible (puisque $0 < \varepsilon < 1$ est donné). Donc, par l'absurde, $\|g_i\|_1 \to \infty$, si $i \to +\infty$.

Cas r ≥ 2. Dérivons * (r-1) fois :

$$\frac{q_i^{r-1}}{q_i} D^{r-1}\varphi_{a_i}(q_i x) = D^{r-1}\left[g_i(\alpha + g_i^{-1}(x)) - g_i\left(\frac{p_i}{q_i} + g_i^{-1}(x)\right)\right] \quad .$$

On a d'après 2.2

$$D^{r-1}g_i(t + g_i^{-1}(x)) = \sum_{k=1}^{r-1} D^k g_i(t + g_i^{-1}(x)) \cdot \varphi_{i,k}(x)$$

pour $1 \leq k \leq r-1$, où

$\varphi_{i,k}(x)$ est une fonction continue de $C^0(T^1)$ indépendante de t avec

$\sup_{i,k} |\varphi_{i,k}(x)|_o \leq E_r A^{(3r-5)(r-1)}$, E_r étant une constante dépendant seulement de r. Donc

$$\left| \frac{q_i^{r-1}}{q_i} D^{r-1} \varphi_{a_i}(a_i x) \right| \leq \sum_{k=1}^{r-1} \left| D^k g_i(\alpha + g_i^{-1}(x)) - D^k g_i\left(\frac{p_i}{q_i} + g_i^{-1}(x)\right) \right| |\varphi_{i,k}(x)|$$

$$\leq (r-1) E_r A^{(3r-5)(r-1)+1} \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{C}{q_i^2} ,$$

C étant une constante dépendant seulement de A et de r. Donc

$$\frac{q_i^{r-1}}{q_i} \left| D^{r-1} \varphi_{a_i} \right|_o \leq \frac{C}{q_i^2} .$$

Or, par 1.4 (et $a_i = \frac{1}{q_i^{r-1+\varepsilon}}$),

$$\frac{q_i^{r-1}}{q_i} \left| D^{r-1} \varphi_{a_i} \right|_o \geq \frac{1}{C_{r-1} q^{1+\varepsilon}} .$$

On conclut que l'on doit avoir

$$\frac{1}{C_{r-1} q_i^{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{q_i^2} ,$$

avec C et C_{r-1} des constantes, mais, si $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$ et $0 < \varepsilon < 1$ est fixé. Il résulte que l'on a une contradiction. Par l'absurde, si $i \to +\infty$,

$$\|g_i\|_r \to +\infty . \quad \blacksquare$$

3.5 *α nombre de Liouville.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ un nombre de Liouville (voir V.6.6). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $p_i/q_i \in \mathbb{Q}$, $q_i \geq 2$, avec

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^i} .$$

On a, si $i \to +\infty$, $q_i \to +\infty$.
Soit f_i construit comme en 3.1, avec $a_i = \frac{1}{q_i^{i/2}}$, $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$, $g_i \in D^\omega(T^1, 0)$. En utilisant 1.4, on a le

Lemme : *Si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^∞-topologie.*

Et par une démonstration analogue à 3.4.2, cas r = 1, on a la

Proposition : Si $i \to +\infty$, $|D\, g_i|_0 \to +\infty$.

3.6 α non de type constant.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, α non de type constant.

Il existe, par V.6.4, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $\lim_{i \to +\infty} \varphi(i) = +\infty$, tel que l'inéquation

$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \varphi(q)}$ a une infinité de solutions.

Soit $p_i/q_i \in \mathbb{Q}$, avec $q_i \to +\infty$ si $i \to +\infty$, et vérifiant

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2 \varphi(q_i)} .$$

Soit, pour $r \geq 2$, f_i construit comme en 3.1 pour $r \geq 2$, avec $a_i = \frac{1}{q_i^{r-1}\sqrt{\varphi(q_i)}}$.

On a $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1}$, $g_i \in D^\omega(T^1)$.

Par 1.4, on montre le

Lemme : Si $i \to +\infty$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie ($r \geq 2$).

Par une démonstration identique à celle de 3.4, en dérivant r-2 fois l'identité *, on a la

Proposition : Si $i \to +\infty$, $\|g_i\|_{r-1} \to \infty$.

4. CATEGORIE DE BAIRE DES ORBITES.

Rappelons que nous avons posé, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F_\alpha^r = \{f \in D^r(T^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

$$O_\alpha^r = \{g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \mid g \in D^r(T^1)\}$$

et, si $0 \leq k \leq r$,

$$O_\alpha^{r,k} = O_\alpha^k \cap F_\alpha^r \quad \text{avec } O_\alpha^{r,r} = O_\alpha^r .$$

On note, si $r \leq +\infty$, $\overline{O}_\alpha^{r,k}$ l'adhérence de $O_\alpha^{r,k}$ dans la C^r-topologie. $\overline{O}_\alpha^{r,k}$ est alors un espace de Baire pour la C^r-topologie ($0 \leq r \leq +\infty$).
Comme F_α^r est fermé dans la C^r-topologie et que $O_\alpha^{r,k} \subset F_\alpha^r$,

$$\overline{O}_\alpha^{r,k} \subset F_\alpha^r \quad .$$

On a le

4.1 Théorème : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et tout $1 \leq r < +\infty$, O_α^r est maigre dans $\overline{O}_\alpha^r$ pour la C^r-topologie. (Il s'en suit que O_α^r est maigre dans F_α^r).

Démonstration : Soit $H_r : D^r(T^1) \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$H_r(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |D^r f|_{C^{r-1}} \quad .$$

Rappelons que $f \to H_r(f)$ est semi-continueinférieurement par IV.1.2, et que $H_r(f) < +\infty$ est équivalent à ce que f soit C^r-conjugué à R_α (par IV.6.4). O_α^r est donc une réunion dénombrable de fermés (dans la C^r-topologie), soit $O_\alpha^r = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, avec $F_n = \{f \in F_\alpha^r \mid H_r(f) \leq n\}$ qui est fermé par la semi-continuité inférieure de H_r .
Pour montrer que O_α^r est maigre dans $\overline{O}_\alpha^r$, il suffit de montrer que F_n est sans point intérieur dans $\overline{O}_\alpha^r$ (par la propriété de Baire de $\overline{O}_\alpha^r$).
Supposons par l'absurde que F_n a un point intérieur dans $\overline{O}_\alpha^r$. Soit $U \subset F_n \subset \overline{O}_\alpha^r$ un ouvert non vide et $f_o \in U$. Comme $f_o \in O_\alpha^r$, $f_o = g_o^{-1} \circ R_\alpha \circ g_o$ avec $g_o \in D^r(T^1)$.
Soit $\Phi : F_\alpha^r \to F_\alpha^r$, $\Phi(f) = g_o \circ f \circ g_o^{-1}$. On a $\Phi(f_o) = R_\alpha$.
Φ est un homéomorphisme (pour la C^r-topologie) de F_α^r mais aussi de $\overline{O}_\alpha^r$. $\Phi(U)$ est donc un ouvert de $\overline{O}_\alpha^r$ avec $R_\alpha \in \Phi(U)$; et aussi $\Phi(U) \subset O_\alpha^r$. Puisque, si $f \in U \subset F_n$, on a $H_r(f) \leq n$. On a $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $\|g\|_r \leq (r+1)n$ par IV.6.2 ($\|g\|_r = |D\,g|_{C^{r-1}} + |Dg^{-1}|_o$). Il en résulte que, si $f \in \Phi(U)$,

$$f = g_o \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \circ g_o^{-1} \quad .$$

Donc $\|g_o \circ g^{-1}\|_r \leq C$, pour tout $f \in \Phi(U)$. C étant une constante ne dépendant que de n.
Or, en 3.4, nous avons construit une suite $f_i = g_i \circ R_\alpha \circ g_i^{-1} \in O$ telle que $f_i \to R_\alpha$ dans la C^r-topologie, $i \to +\infty$; donc pour i assez grand, $f_i \in \Phi(U)$.
Or, par la proposition 3.4, si $i \to +\infty$, $\|g_i\|_r \to +\infty$.
Par IV.2.5, si $\|g\|_r \leq a$ ($a \geq 1$), alors $\|g^{-1}\|_r \leq C_r\, a^{3r-2}$ (avec C_r une cons-

tante universelle ne dépendant que de r).
Par l'absurde, on conclut que F_n est donc sans point intérieur dans $\overline{O}^r_\alpha$.
Il suit, comme n est arbitraire, que $O^r_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est bien maigre dans $\overline{O}^r_\alpha$. ∎
On a le

4.2 Théorème : Pour tout nombre α de Liouville, $\overline{O}^\infty_\alpha \cap O^{\infty,1}_\alpha$ est maigre dans $\overline{O}^{\infty,1}_\alpha$ pour la C^∞-topologie (comme $O^\infty_\alpha \subset O^{\infty,1}_\alpha$, O^∞_α est donc maigre dans $\overline{O}^\infty_\alpha$ pour la C^∞-topologie).

Démonstration : La démonstration est presque identique à la précédente.
On a $O^{\infty,1}_\alpha = \{f \in F^\infty_\alpha \mid H_1(f) < +\infty\}$ par IV.6.1 et IV.6.4.
$O^{\infty,1}_\alpha \cap \overline{O}^\infty_\alpha$ est donc réunion dénombrable des fermés $F_n = \{f \in \overline{O}^\infty_\alpha \mid H_1(f) \le n\}$ de $\overline{O}^\infty_\alpha$ (fermé d'après la semi-continuité inférieure de H_1.
Montrons par l'absurde que F_n est sans point intérieur. Soit $U \subset F_n$ un ouvert non vide.
Comme O^∞_α est dense dans $\overline{O}^\infty_\alpha$, on conclut que $U \cap O^\infty_\alpha$ est non vide. Soit $f_o \in U \cap O^\infty_\alpha$: $f_o = g_o^{-1} \circ R_\alpha \circ g_o$ avec $g_o \in D^\infty(T^1,0)$, $\Phi(f) = g_o \circ f \circ g_o^{-1}$ est un homéomorphisme de $\overline{O}^\infty_\alpha$ pour la C^∞-topologie et $\Phi(f_o) = R_\alpha$. On a donc que $\Phi(U)$ est ouvert dans $\overline{O}^\infty_\alpha$ avec $R_\alpha \in \Phi(U)$, et pour tout $f \in \Phi(U)$, on a $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^1(T^1,0)$, et $\|g\|_1 \le C < +\infty$ (par IV.6.2) avec C une constante ne dépendant que de n.
Or ceci est incompatible avec l'existence de la suite définie en 3.5.
Donc par l'absurde, F_n est sans intérieur dans $\overline{O}^\infty_\alpha$, et il résulte que $O^{\infty,1}_\alpha \cap \overline{O}^\infty_\alpha = \bigcup F_n$ est maigre dans $\overline{O}^\infty_\alpha$. ∎
Par une démonstration presque identique à celle de 4.2, en utilisant 3.6, on a le

4.3 Théorème : Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ n'est pas de type constant, alors, pour $2 \le r < +\infty$, $O^{r,r-1}_\alpha \cap \overline{O}^r_\alpha$ est maigre dans $\overline{O}^r_\alpha$ pour la C^r-topologie.

On a le problème suivant, qui est d'ailleurs relié au problème sur l'équation linéarisée, voir VII.8.

4.4 Problème : Si α est un nombre de type constant, si $2 \le r < +\infty$, existe-t-il $f \in F^r_\alpha$ qui ne soit pas C^{r-1}-conjugué à R_α ?

4.5 Remarque : Si $1 \le r < +\infty$, alors O^r_α est un F_σ (i.e. une réunion dénombrable de fermés car H_r est semi-continue). Si $r = +\infty$, O^∞_α est seulement

a priori un $F_{\sigma\delta}$ (une intersection dénombrable de F_σ et donc de deuxième classe de Baire). En effet $O_\alpha^\infty = \{\bigcap_r \{f \mid H_r(f) < +\infty\} \cap F_\alpha^\infty$.

5. RESULTATS POSITIFS SUR LES ORBITES.

5.1 Rappelons le résultat de VII.2 et III.4.1.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ satisfaisant une condition diophantienne : il existe $\beta \geq 0$ et $C \geq 0$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - p/q| \geq \frac{C}{q^{2+\beta}}$.

Théorème : Si/pour $\beta' > \beta$, il existe un voisinage de R_α, $V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$, dans la $C^{2(\beta'+1)}$-topologie tel que, si $r \geq 2(\beta'+1)$, $f \in V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)} \cap F_\alpha^r$,alors f est $C^{r-1-\beta'}$-conjugué à R_α , de plus,si $f \in F_\alpha^\infty \cap V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$ (resp. $F_\alpha^\omega \cap V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$), f est C^∞- (resp. C^ω-) conjugué à R_α .

On a donc le

5.2 Corollaire : Si α satisfait une condition diophantienne,alors O_α^∞ est ouvert dans F_α^∞ pour la C^∞-topologie.

Démonstration : O_α^∞ est ouvert au voisinage de R_α dans F_α^∞ et donc ouvert en chaque point par conjugaison. ∎

5.3 Discussion.

5.3.1 Le théorème 4.2 montre que α satisfait une condition diophantienne est absolument nécessaire dans le théorème 5.1.

5.3.2 Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre $\beta' > \varepsilon$; soient $2(\beta' + 1) = 2 + 2\varepsilon$, et $1+\beta' = 1 + \varepsilon$; et pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ non de type constant d'après 4.3 la perte de différentiabilité est supérieure à 1.

5.3.3 Si $r_o = [2(\beta'+1)]+1$, alors, si $r \geq r_o$, $\overline{O}_\alpha^r$ est d'intérieur non vide dans la C^r-topologie (par 5.1).

5.3.4 Si $r_1 = [\beta'+1]+1$, si $r \geq r_o$, $O_\alpha^{r,r-r_1}$ est ouvert dans F_α^r pour la C^r-topologie (par 5.1).

5.3.5 : On a donc, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $r_o = 3$ et $r_1 = 2$ donc, si

$r \geq 3$, $O_\alpha^{r,r-2}$ est ouvert dans F_α^r.

5.3.6 Nous avons déjà discuté en X.2 la conjugaison C^o : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, O_α^o est résiduel dans F_α^o pour la C^o-topologie.

5.3.7 Nous avons déjà en VII.2 discuté le fait que le voisinage $V_{R_\alpha}^{2(\beta'+1)}$ qui est dans la $C^{2(\beta'+1)}$-topologie, mais cette discussion est plutôt une question de méthode.
Par exemple, nous avons montré que si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est de densité bornée, alors $O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$ et donc O_α^∞ est ouvert dans F_α^∞ pour la C^o-topologie, mais pour aboutir à ce résultat, il nous semble que la méthode du chapitre VII est insuffisante. Voir à ce propos XIII qui montre que sur T^n la question est beaucoup plus compliquée.

6. PROBLEME.

On a le problème suivant qui est analogue à la conjecture d'Arnold en C^∞.

6.1 Problème : Si α satisfait une condition diophantienne, est-ce que $O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$?

6.2 On a la
Proposition : Si α satisfait une condition diophantienne, alors $O_\alpha^\infty \cap F_\alpha^\omega = O_\alpha^\omega$.

Démonstration : Si $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ avec $h \in D^\infty(T^1,0)$ et $f \in D^\omega(T^1)$, soit $h_i \to h$ dans la C^∞-topologie, avec $h_i \in D^\omega(T^1,0)$.
Donc $h_i^{-1} \circ f \circ h_i \to R_\alpha$ dans la C^∞-topologie, et la proposition résulte de 5.1. ∎

6.3 Soit α satisfaisant la condition diophantienne : il existe $\beta \geq 0$ et $C > 0$ vérifiant, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\beta}}$. Soit $\beta' > \beta$.

Proposition : Soit $r_o = [2(\beta'+1)] + 1$ et $f \in F_\alpha^r$, $r \geq r_o$; si f est C^{r_o}-conjugué à R_α, alors f est $C^{r-1-\beta'}$-conjugué à R_α.

Démonstration : Soit $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ avec $h \in D^{r_o}(T^1)$. On approxime h par h_i dans la C^{r_o}-topologie, $h_i \in D^\omega(T^1)$, et $h_i^{-1} \circ f \circ h_i \to R_\alpha$ dans la C^{r_o}-topologie, et on applique 5.1. ∎

6.4 Proposition : Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, avec O^∞_α ouvert dans F^∞_α par la C^{1+vb}-topologie, alors $O^\infty_\alpha = F^\infty_\alpha$ (α satisfait une condition diophantienne d'après 4.2).

Démonstration : Cela résulte immédiatement de VIII.2.5. ∎

6.5 Soit α un nombre de type Roth : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$.
Nous avons montré en IX.7 pour α de type Roth la proposition :

Proposition : Si $f \in F^\infty_\alpha$ et si f est C^1-conjugué à R_α, alors f est C^∞-conjugué à R_α.

Donc pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ le problème 6.1 se ramène à prouver la conjugaison C^1.

7. UNE CONJECTURE.

7.1 Conjecture : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, O^∞_α est dense pour la C^∞-topologie dans F^∞_α.

7.2 - Evidemment, si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est de densité bornée, comme $O^\infty_\alpha = F^\infty_\alpha$, la conjecture est vraie.

- La conjecture implique que, pour tout $0 \leq r \leq +\infty$ (entier), O^r_α est dense dans F^r_α pour la C^r-topologie (voir III.4.4).

- Par le théorème de Denjoy, O^∞_α est dense dans F^∞_α pour la C^o-topologie.

- $O^r_{p/q}$ ($p/q \in \mathbb{Q}$) est un fermé sans point intérieur dans $F^r_{p/q}$ par III.2.5.

7.3 Théorème : Il existe un ensemble $A \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ résiduel, tel que, pour $a \in O$, O^∞_α est dense dans F^∞_α pour la C^∞-topologie.

7.4 Remarque : Les nombres de Liouville sont résiduels dans $\mathbb{R}$ par V.5.4.

7.5 Un invariant. Pour démontrer le théorème/nous allons introduire un invariant D_∞. Soit d_∞ une métrique définissant la C^∞-topologie sur $D^\infty(T^1)$.
Si $f \in D^\infty(T^1)$, soit $\alpha = \rho(f)$,

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha) \quad .$$

Posons alors

$$D_\infty(f) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (d_\infty(g_n^{-1} \circ R_\alpha \circ g_n, f)) \quad .$$

On a $$D_\infty : D^\infty(T^1) \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \quad ,$$

D_∞ est semi-continue inférieurement dans la C^∞-topologie, et donc $D_\infty^{-1}(0)$ est un G_δ dans $D^\infty(T^1)$ (voir I.4). Si $D_\infty(f) = 0$, alors $f \in \overline{O}_\alpha^\infty$ avec $\alpha = \rho(f)$ et où $\overline{O}_\alpha^\infty$ est l'adhérence de O_α^∞ pour la C^∞-topologie.
Remarquons par IV.5 que si f est C^∞-conjugué à R_α, alors $D_\infty(f) = 0$ (puisque $g_n^{-1} \circ R_\alpha \circ g_n \to f$ dans la C^∞-topologie si $n \to +\infty$).

7.6 Considérons $f \in D^\infty(T^1)$.

7.6.1 Soit $h(\lambda) = \rho(R_\lambda \circ f)$ et $K = \mathbb{R} - \operatorname{Int} h^{-1}(\mathbb{Q})$.
K est un fermé parfait de $\mathbb{R}$. Si f a la propriété A_∞ (i.e. pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ et tout λ $(R_\lambda \circ f)^q \neq R_p$), alors K est totalement discontinu (par III.5).
Rappelons la proposition III.5.3 :

7.6.2 Proposition :

1) Si G est résiduel dans K, alors $h(G)$ est résiduel dans $\mathbb{R}$
2) Si D est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, $h^{-1}(D) \cap K$ est dense dans K.

7.6.3 Proposition : $G = D_\infty^{-1}(0) \cap K$ est résiduel dans K.

$G = D_\infty^{-1}(0) \cap K$ est un G_δ. Il reste à montrer que G est dense dans K. Or si α est de densité bornée et si $\rho(R_\lambda \circ f) = \alpha$, alors $D_\infty(R_\lambda \circ f) = 0$ puisque $R_\lambda \circ f$ est C^∞-conjugué à R_α. Par la proposition 7.6.2, l'image inverse par h des nombres de densité bornée (qui sont denses dans $\mathbb{R}$) est donc dense dans K.
G est donc un G_δ dense. ∎

7.7 Démonstration du théorème 7.3 : Soit (f_i) un ensemble dénombrable dense de difféomorphismes de $D^\infty(T^1)$. Soient G_i les ensembles résiduels associés à f_i par la proposition 7.6.3.

Soit $A = \bigcap_i \rho(G_i)$. A est résiduel dans $\mathbb{R}$ (en fait $A \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Si $\alpha \in A$, on a, si λ_i est l'unique élément de $\mathbb{R}$ tel que $\rho(R_{\lambda_i} \circ f_i) = \alpha$, pour tout i, $D_\infty(R_{\lambda_i} \circ f_i) = 0$.

Or $(R_{\lambda_i} \circ f_i)$ est dense dans F^∞_α par III.4.4 et puisque, si $D_\infty(R_{\lambda_i} \circ f_i) = 0$, alors $R_{\lambda_i} \circ f_i \in \overline{O}^\infty_\alpha$. On conclut que $\overline{O}^\infty_\alpha$ est dense dans F^∞_α, soit $\overline{O}^\infty_\alpha = F^\infty_\alpha$. ∎

CHAPITRE XII

CENTRALISATEURS

Plan :

1. Conjugaison absolument continue.
2. Conjugaison et module de continuité.
3. Centralisateurs.

Commentaire :

Dans ce chapitre, on reprend en 1. l'exemple construit par V. I. Arnold dans [1]. En suivant Arnold nous montrons de façon compliquée qu'il existe $b \in \mathbb{R}$, tel que si $0 < a < \frac{1}{2\pi}$ est fixé, $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ est C^0-conjugué à une translation R_α ($\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) mais non absolument continuement conjugué. Nous avons donné ailleurs une démonstration entièrement élémentaire (reproduite dans Rosenberg [2]) ; néanmoins il nous semble que l'introduction d'un invariant semi-continu supérieurement explique de façon plus rationnelle la persistance de la mesure singulière des semi-stables dans F^∞ ; de plus des généralisations en grandes dimensions sont possibles.

En 2. on étudie le module de continuité de l'homéomorphisme qui conjugue. Ici on se reportera au problème VI.5.6.1.

En 3., on montre que contrairement à 1. et 2.,où ce sont des propriétés des semi-stables qui persistent dans F^∞, ici, c'est une propriété de ceux qui sont C^∞-conjugués à des rotations qui persistent génériquement dans F^∞ : avoir un centralisateur ayant la puissance du continu. On utilise le théorème fondamental IX.6.1. pour montrer que $O^\infty = \{f \in D^\infty(T^1) \mid f \text{ est } C^\infty\text{-conjugué à } R_\alpha \ (\alpha = \rho(f))\}$ est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie.

On peut dire en résumé que ce chapitre est sur le mode suivant : on introduit un invariant semi-continu tel que, si cet invariant est égal à 0 ou $+\infty$ suivant les cas, alors on a une propriété de conjugaison d'un difféomorphisme ; cette propriété sera alors vraie par la semi-

continuité sur un G_δ, et en général en choisissant un sous-ensemble fermé de $D^\infty(T^1)$ la propriété sera vraie sur un G_δ dense, et donc sera générique dans ce fermé. On choisira en général comme sous-ensemble fermé soit F^∞, soit $K_a = [0,1] - \mathrm{Int}\{b \mid \rho(f_b) \in \mathbb{Q}\}$ avec $f_b = x + a \sin 2\pi x + b$, $0 < a < 1/2\pi$, a étant fixé.

Nous avons appliqué ce principe en 1., 2. et 3., et nous donnerons ailleurs d'autres applications.

Le théorème 3.6 donne une réponse négative à un problème de H. Rosenberg et W. Thurston, ainsi qu'un contre-exemple à une conjecture de Nancy Kopell.

*
* *

1. CONJUGAISON ABSOLUMENT CONTINUE.

1.1 Définition : Soit $f \in D^1(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et f est C^0-conjugué à R_α ; soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. f n'est pas conjugué à R_α de façon absolument continue si g n'est pas absolument continue (i.e. il existe un ensemble A-borélien, $m(A) = 0$ mais $m(g(A)) \neq 0$).

1.2 Proposition : Soit $f \in D^1(T^1)$ avec $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et g non absolument continu, alors on a

a) g^{-1} est non-absolument continue,

b) g et g^{-1} sont m-presque partout dérivables par un célèbre théorème de Lebesgue.

On a m-presque partout

$$Dg^{-1} = Dg = 0 \quad .$$

c) Si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par le difféomorphisme $\bar{f} : T^1 \to T^1$ induit par f sur T^1. Alors μ est étrangère à la mesure de Haar, m, de T^1.

Démonstration : On a sur T^1, $\bar{f} = \bar{g}^{-1} \circ R_\alpha \circ \bar{g}$. Soit A un borélien de T^1, tel que $m(A) = 0$ et $m(g(A)) \neq 0$ (qui existe puisque g est non absolument continue).

Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}^n(A)$, $B \subset T^1$.

B est invariant par $\bar{f}$ et B est de m mesure nulle puisque $\bar{f}$ est C^1.

$\bar{g}(B)$ est invariant par R_α, il résulte donc que $m(\bar{g}(B)) = 0$ ou 1 puisque $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Or $m(\bar{g}(B)) > 0$ donc $m(\bar{g}(B)) = 1$. Il s'ensuit, comme $\bar{g}^{-1}$ envoie $T^1 - \bar{g}(B)$ sur $T^1 - B$, $m(T^1 - \bar{g}(B)) = 0$ et $m(T^1 - B) = 1$, donc $\bar{g}$ et $\bar{g}^{-1}$ sont singulières (i.e. chacun envoie un ensemble de m-mesure nulle sur un ensemble de m-mesure 1).

On a donc m-presque partout $Dg = Dg^{-1} = 0$. Ce qui montre a) et b).

c) résulte de $\bar{g}_* \mu = m$ (i.e. pour tout borélien C, $\mu(C) = m(g(C))$). ∎

Remarque :

1) Si $f \in D^1(T^1)$ et si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ ($\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$), il résulte par l'absurde que, si g^{-1} est absolument continue, alors g est absolument continue.

2) Si $f = D^2(T^1)$ et $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}$, alors par le théorème de Denjoy, $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. Il résulte de la m-ergodicité VIII.1.4 que si g est absolument

la propriété de

continue, alors g^{-1} est absolument continue.

3) Si g est absolument continue, si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur T^1, alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar m de T^1.

1.4 Définition : Soit f un homéomorphisme de T^1, $x \in T^1$ est un point errant de f, s'il existe un ouvert $U \ni x$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les ensembles $f^n(U)$ sont tous disjoints.

Les points errants par f forment donc un ouvert, le complémentaire est noté $\Omega(f)$ qui est fermé dans T^1.

Exemple : Soit $f \in \mathrm{Diff}^o_+(T^1)$, $p/q = \rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tout point de T^1 non périodique par f est un point errant. Ce qui est équivalent à: $x \in \Omega(f)$, alors x est périodique pour f ($f^q(x) = x$).

1.5 Proposition : Soit $f \in \mathrm{Diff}^1_+(T^1)$ tel que la mesure de Haar des points errants par f soit 1, ($m(\Omega(f)) = 0$), alors si $n \to +\infty$, $Df^n \to 0$ m-presque partout.

Démonstration : Soit x un point errant par f et soit [a,b] tel que les ensembles $f^n([a,b])$ soient tous disjoints pour $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b Df^n(x)\, dx < +\infty \quad ,$$

donc pour m-presque tout $x \in [a,b]$, si $n \to +\infty$, $Df^n(x) \to 0$. Comme $m(\Omega(f)) = 0$, on peut recouvrir $T^1 - \Omega(f)$ par un ensemble dénombrable d'intervalles errants, donc m-presque tout $x \in T^1$ si $n \to +\infty$, $Df^n(x) \to 0$. ∎

1.6 Soit $\varphi : T^1 \to \mathbb{R}$ m-mesurable.

Soit $\delta(\varphi,0) = \int_{T^1} \frac{|\varphi|}{1+|\varphi|}\, dm = \left| \frac{|\varphi|}{1+|\varphi|} \right|_{L^1}$.

δ définit une métrique telle que si $(\delta(\varphi_i,0)) \to 0$ pour $i \to +\infty$, alors (φ_i) converge en m-mesure vers 0. On peut alors extraire une sous-suite de (φ_i) qui converge m-presque partout vers 0 (voir Halmos [1]).

1.7 Un invariant.

Soit $N : \mathrm{Diff}^1(T^1) \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, définie par

$$f \longmapsto N(f) = \operatorname*{Inf}_{n\geq 1} \delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \ , \ 0\right).$$

- N est une application semi-continue inférieurement dans la C^1-topologie Par suite que $N^{-1}(0)$ est un G_δ dans la C^1-topologie par I.4.
- $N(f) = 0$ implique qu'il existe une suite d'entiers $n_i \to +\infty$ quand $i \to +\infty$ telle que

$$\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} Df^i \to 0 \quad \text{m-presque partout.}$$

Exemple : Par 1.5 si $f \in D^1(T^1)$, $\rho(f) = p/q$, et si f a un nombre fini de points périodiques sur $[0,1]$, alors $N(f) = 0$.

1.8 Proposition : Soit $f \in D^1(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tel que $g \circ f = R_\alpha \circ g$, et $N(f) = 0$, alors g est non absolument continue (on ne suppose pas que g est un homéomorphisme).

Démonstration : Si $N(f) = 0$, il existe une suite d'entiers $n_i \to +\infty$ quand $i \to +\infty$ telle que $\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} Df^i \to 0$ m-presque partout.

Montrons que si $\varphi \in L^1(T^1,m)$, alors, quand $i \to +\infty$, $\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi.(f^i)Df^i \to 0$ m-presque partout. En effet, on a

$$\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi \circ f^i.Df^i = \left(\frac{\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi \circ f^i.Df^i}{\sum_{i=0}^{n_i-1} Df^i}\right) \cdot \frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} Df^i \ .$$

Or par le théorème de Chacon-Ornstein (voir Garsia [1]), on a , si $n \to +\infty$,

$\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i.Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}$ converge m-presque partout vers une limite finie.

Il suit que, si $i \to +\infty$, $\frac{1}{n_i}\sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi \circ f^i.Df^i \to 0$ m-presque partout. Nous prouvons la proposition par l'absurde. Supposons g absolument continue. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$ sur T^1. On a $\bar{g}_*\mu = m$, et donc, si g est absolument continue, μ est absolument continue par rapport à m. Soit, par le théorème de Radon-Nikodym, $\mu = \varphi.m$ avec $\varphi \geq 0$, $\varphi \in L^1(T^1,m)$, $\int_{T^1} \varphi dm = 1$. On a d'après l'invariance de μ par $\bar{f}$:

$$\varphi \circ f . Df = \varphi \quad .$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{n_i} \sum_{i=0}^{n_i-1} \varphi \circ f^i \, Df^i = \varphi \quad .$$

Si $n_i \to +\infty$, $\varphi = 0$ m-presque partout, ce qui est contraire à $\varphi \in L^1(T^1,m)$ et $\int_{T^1} \varphi dm = 1$, donc g est non-absolument continue. ∎

1.9 Remarque : Soit $f \in D^1(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors, quand $n \to +\infty$

$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Df^i$ converge faiblement dans le dual de $C^0(T^1)$ vers μ (l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$).
En effet, soit $\varphi \in C^0(T^1)$. On a, par la formule de changement de variables,

$$\int_{T^1} \varphi \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right) m = \int_{T^1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^{-i} \right) m \quad .$$

Or, par l'unique ergodicité de f, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^{-i}$ converge uniformément vers $\mu(\varphi)$, d'où le résultat.

1.10 Soit $F^\infty = D^\infty(T^1) - \text{Int } \rho^{-1}(\mathbb{Q})$.
F^∞ est un fermé sans point intérieur dans $D^\infty(T^1)$. De plus, c'est l'adhérence des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel.
Rappelons que $F^\infty \cap \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est maigre dans F^∞ pour la C^∞-topologie (c'est même un F_σ sans point intérieur). $F^\infty - \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ est donc un G_δ dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie et par le théorème de Denjoy, si $f \in F^\infty - \rho^{-1}(\mathbb{Q})$, f est C^0-conjugué à la translation R_α avec $\alpha = \rho(f) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1.11 On a le théorème suivant qui montre que l'exemple d'Arnold [1] est générique dans F^∞.

Théorème : La propriété suivante dans F^∞ est générique pour la C^∞-topologie (i.e. vraie sur un ensemble résiduel). f est C^0-conjugué à une translation irrationnelle, mais de façon non absolument continue.

Démonstration : Montrons que $F^\infty \cap N^{-1}(0)$ est résiduel dans F^∞ (pour la C^∞-topologie). Par la semi-continuité supérieure, $N^{-1}(0)$ est un G_δ.
$N^{-1}(0) \cap F^\infty$ est dense pour la C^∞-topologie dans F^∞ puisque, par l'exemple de

1.7, il contient l'ensemble des C^∞ difféomorphismes de nombre de rotation rationnel qui n'ont qu'un nombre fini de points périodiques sur $[0,1]$, ensemble qui est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie par III.6.3.
Si $f \in N^{-1}(0) \cap (F^\infty - \rho^{-1}(\mathbb{Q}))$, alors f est C^0-conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f)$) mais pas de façon absolument continue par 1.8 (puisque $N(f) = 0$). La propriété est donc vraie sur le G_δ dense $N^{-1}(0) \cap F^\infty - \rho^{-1}(\mathbb{Q})$ de F^∞. ∎

1.12 Soient $0 < |a| < 1/2\pi$ et $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b \in D^\omega(T^1)$ pour b un nombre réel.
Soient $K_a = [0,1] - \mathrm{Int}\{b \mid \rho(f_b) \in \mathbb{Q}\}$
et $D = K_a \cap \{b \mid \rho(f_b) \in \mathbb{Q}\}$; D est un ensemble dénombrable dense de K_a, voir III.5.
Une propriété est générique dans K_a si f_b a la propriété pour b appartenant à un ensemble résiduel de K_a.

1.13 Proposition : Il est générique dans K_a que f_b soit C^0-conjugué à une translation irrationnelle, mais de facon non absolument continue.

Démonstration : Pour $b \in K_a - D$, f_b est C^0-conjugué à R_α ($\alpha = \rho(f_b) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) par le théorème de Denjoy. Evidemment, $K_a - D$ est résiduel dans le Cantor K_a.
Si $b \in D$, par III.5.2, on a $\rho(f) = p/q$ avec $f^q \neq R_p$; comme f est C^ω, f a un nombre fini de points périodiques sur $[0,1]$, donc par l'exemple 1.7, $N(f_b) \neq 0$.
$N^{-1}(0) \cap K_a = \{b \in K_a \mid N(f_b) = 0\}$ est par la semi-continuité supérieure de N, un G_δ qui est aussi dense puisque $D \subset G_\delta$.
Donc $G = N^{-1}(0) \cap (K_a - D)$ est résiduel dans K_a et si $b \in G$, on a la propriété désirée par 1.7. ∎

2. CONJUGAISON C^0 ET MODULE DE CONTINUITE.

2.1 Rappelons rapidement IV.3.2.
Soit $w : [0,1] \to [0,1]$ continue croissante, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$. Si $\delta > 1$, on pose $w(\delta) = 1$. On suppose, pour $a > 0$, $w(a\delta) \leq ([a]+1)w(\delta)$ et si $a \in \mathbb{N}$, $w(a\delta) = a\,w(\delta)$.
On définit alors les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$-périodiques de module de continuité inférieur ou égal w : $C^w(T^1)$.
Si $\varphi \in C^w(T^1)$, $|\varphi|_{C^w} = \sup_{x \neq y} \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} < +\infty$. Rappelons que nous avons

défini : $g \in D^0(T^1)$ est un homéomorphisme de classe C^w si $g - Id$ et $g^{-1} - Id$ sont dans $C^w(T^1)$.
Si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec g homéomorphisme de classe C^w, on a

$$H_{w^2}(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f^n - Id - n\alpha|_{C^{w^2}} < +\infty \quad \text{avec } w^2 = w \circ w$$

et on a, si $1 \leq r \leq +\infty$,

$$H_{w^2} : D^r(T^1) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

est semi-continue dans la C^r-topologie (voir IV.6.5).
De plus pour $f \in D^1(T^1)$ tel que $\rho(f) = p/q$, $H_w(f) < +\infty$ implique que f est C^0-conjugué à $R_{p/q}$ (par II.9 ; voir aussi IV.6.5.6). Donc si $f \in D^1(T^1)$ avec $\rho(f) = p/q$ et $f^q \neq R_p$, alors pour tout module de continuité w, on a $H_w(f) = +\infty$.

2.2 On reprend les notations de 1.10. On a la

Proposition : Soit w un module de continuité. Il est générique dans F^∞ (pour la C^∞-topologie) d'être C^0-conjugué à une translation irrationnelle, mais de ne pas l'être par un homéomorphisme de classe C^w.

Démonstration : Par la semi-continuité inférieure de H_{w^2}, $F^\infty \cap H_{w^2}^{-1}(+\infty)$ est un G_δ par I.4 il est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie puisqu'il contient l'ensemble des difféomorphismes de nombre de rotation rationnel mais non périodiques qui est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie par III.6.3.
Alors $H_{w^2}^{-1}(+\infty) \cap (F^\infty - \rho^{-1}(\mathbb{Q}))$ est un G_δ dense dans F^∞ sur lequel on a la propriété de 2.2, puisque si f est conjugué à une translation par un homéomorphisme de classe C^w, on a $H_{w^2}(f) < +\infty$. ∎

Remarque :

1) "$f \in D^0(T^1)$ n'est pas un homéomorphisme de classe C^w" veut dire que soit $f - Id \notin C^w(T^1)$ soit $f^{-1} - Id \notin C^w(T^1)^n$.

2) En particulier, il est générique dans F^∞ d'être conjugué à une translation irrationnelle, par un homéomorphisme qui n'est pas de classe C^β pour tout $0 < \beta < 1$.

2.3 On reprend les notations de 1.12.

Proposition : Soit w un module de continuité. Il est générique dans K_a que $f_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ soit C^0-conjugué à une translation irrationnelle, par un homéomorphisme qui n'est pas de classe C^w.

Démonstration : Nous la laissons en exercice.

3. CENTRALISATEURS.

3.1 L'invariant.

Soit d_r une métrique définissant la C^r-topologie sur $\mathrm{Diff}_0^r(T^n)$.

Soit $K_r : \mathrm{Diff}_0^r(T^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$$f \longmapsto \operatorname{Inf}_{k \geq 1} d_r(f^k, \mathrm{Id}) .$$

K_r est semi-continue supérieurement pour la C^r-topologie comme inf de fonctions continues.

Il en résulte que $K_r^{-1}(0)$ et un G_δ par I.4. Si f est C^r-conjugué à R_α, alors $K_r(f) = 0$; en effet, si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, donc si $k \in \mathbb{N}$, $f^k = g^{-1} \circ R_{k\alpha} \circ g$; on choisit $k_i \to +\infty$ tel que $k_i \alpha \to 0 \bmod \mathbb{Z}^n$ et donc, si $i \to +\infty$, $d_r(f^{k_i}, \mathrm{Id}) \to 0$.

On pose, si $f \in D^r(T^n)$

$$K_r(f) = K_r(\bar{f}) \in \mathbb{R}_+ .$$

3.2 K_r et le centralisateur.

Soit $f \in \mathrm{Diff}_0^r(T^n)$, soit $\mathbb{Z}_f = \{f^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, et soit G_f l'adhérence de $\mathbb{Z}_f$ dans $\mathrm{Diff}_0^r(T^n)$ pour la C^r-topologie. G_f est un groupe fermé et abélien de $\mathrm{Diff}_0^r(T^n)$. G_f est contenu dans le centralisateur C^r de f dans $\mathrm{Diff}_0^r(T^n)$ noté $\mathrm{Cent}^r(f)$. f n'est pas périodique si $\mathbb{Z}_f$ n'est pas fini (ou encore si pour tout entier $k \geq 1$, $d_r(f^k, \mathrm{Id}) > 0$).

Proposition : Soit $0 \leq r \leq +\infty$ et $f \in \mathrm{Diff}_0^r(T^n)$ non périodique, alors $K_r(f) = 0$ est équivalent à ce que G_f ait la puissance du continu.

Démonstration : Puisque f n'est pas périodique et que $K_r(f) = 0$, il existe une suite d'entiers $k_i \to +\infty$ tel que, si $i \to +\infty$, $f^{k_i} \to Id$ dans la C^r-topologie. Puisque $Diff_o^r(T^n)$ est un espace topologique polonais (si $0 \leq r \leq +\infty$) pour la C^r-topologie et que G_f est fermé dans $Diff_o^r(T^n)$ pour la C^r-topologie, G_f est donc un espace topologique polonais (il est homéomorphe à un espace métrique complet séparable).
Or G_f est un espace topologique parfait (i.e. sans point isolé), car c'est un groupe topologique, et si un groupe topologique a un point isolé, tout point est isolé et il est alors discret. Mais dans G_f, pour la C^r-topologie, si $i \to +\infty$, $f^{k_i} \to Id$ dans la C^r-topologie, et $f^{k_i} \neq f^{k_j}$, pour $j \neq i$ puisque f n'est pas périodique . Donc G_f est homéomorphe à un espace métrique complet sans point isolé. Il a donc la puissance du continu par I.3.4.

Réciproque : $K_r(f) \neq 0$ est équivalent à ce que l'Identité soit isolée dans $\mathbb{Z}_f$ et donc G_f discret pour la C^r-topologie. Alors $G_f = \mathbb{Z}_f$ est dénombrable. On a donc établi que $Card(G_f) = Card(\mathbb{R})$ implique que $K_r(f) = 0$. ∎

3.3 Remarques sur T^1.

a) Rappelons que si $K_o(f) = 0$, alors f est C^o-conjugué à une rotation voir XI.4.

b) Si $r \geq 0$ et si $K_r(f) = 0$ et si $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors on a

$$G_f \subset \mathrm{Cent}^r(f) \subset \mathrm{Cent}^o(f) \cong T^1 \quad .$$

En effet si f est C^o-conjugué à R_α, $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$; par II.3.3, puisque $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathrm{Cent}^o(f) = \{g^{-1} \circ R_t \circ g \mid t \in T^1\} \cong T^1$. Il en résulte que si $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et que si $K_r(f) = 0$, alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ est un groupe abélien. Par II.2.11, ρ est un homomorphisme de groupe continu et injectif

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cent}^r(f) \xhookrightarrow{\rho} T^1 \quad .$$

c) Si $r \geq 0$, soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(T^1)$ avec $K_o(f) = 0$, et si $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, f est C^r-conjugué à $R_{p/q}$. $\mathrm{Cent}^r(f)$ est alors un groupe ayant la puissance du continu, mais ce groupe n'est pas abélien, de plus $\mathbb{Z}_f = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est fini et donc discret dans $\mathrm{Diff}^r_+(T^1)$.

d) Si $f \in D^r(T^1)$, le centralisateur de f dans $D^r(T^1)$ a la puissance du continu, équivaut à ce que le centralisateur de $\bar{f}$ dans $\mathrm{Diff}^r_+(T^1)$ le soit par II.2.12. Il est à noter que si $f \in D^r(T^1)$, alors $\mathbb{Z}_f = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est discret dans $D^r(T^1)$; il faut plutôt considérer $\{R_p \circ f^n \mid n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}$.

d) Soit X le champ de vecteurs de T^1, $X = \sin 2\pi x$. Le groupe à un paramètre $\exp(tX)$ engendré par X est évidemment un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{R}$, mais $f = \exp(X)$, vérifie $K_o(f) \neq 0$, puisque $f(0) = 0$, et $f \neq \mathrm{Id}$.

3.4 On a la

Proposition : Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $1 \leq r < +\infty$. Alors les deux propriétés suivantes sont génériques (i.e. vraies sur un G_δ dense) pour la C^r-topologie dans $\overline{O}^r_\alpha$:

: a) Etre C^o-conjugué à R_α, mais pas C^r-conjugué à R_α

b) Avoir un centralisateur C^r ayant la puissance du continu.

Démonstration : b) $K_r^{-1}(0) \cap \overline{O}^r_\alpha$ est un G_δ pour la C^r-topologie d'après la semi-continuité supérieure de K_r. Si $f \in O^r_\alpha$, alors $K_r(f) = 0$ par 3.1. Or O^r_α est dense dans $\overline{O}^r_\alpha$ pour la C^r-topologie (puisque par définition $\overline{O}^r_\alpha$ est l'adhérence de O^r_α dans la C^r-topologie) et donc $K_r^{-1}(0) \cap \overline{O}^r_\alpha$ est un G_δ dense dans $\overline{O}^r_\alpha$. Donc la propriété b) résulte de la proposition 3.2.
Pour voir a), il suffit d'appliquer XII.4.2 et aussi le fait que $K_r(f) = 0$, alors f est C^o-conjugué à R par X.1.4. ∎

La proposition suivante précise la structure des centralisateurs.

3.5 Proposition : Soient $1 \leq r \leq +\infty$ et $f \in \mathrm{Diff}^r_+(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $K_r(f) = 0$ et f non C^r-conjugué à R_α ; alors le centralisateur C^r de f :

$\mathrm{Cent}^r(f)$ a la puissance du continu par 3.2 et $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ est un sous-groupe borélien de T^1 de mesure de Haar nulle.

Démonstration : D'après L. Schwartz [1], comme $\mathrm{Cent}^r(f)$ est un espace topologique polonais, et que $\rho : \mathrm{Cent}^r(T^1) \to T^1$ est continu et injective (puisque $\rho(f) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et que $K_r(f) = 0$ implique que f est C^0-conjugué à R_α), $A = \rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ est un sous-groupe borélien de T^1.

Nous aurons besoin du

Lemme : Soit $A \subset T^1$ un sous-groupe m-mesurable de T^1, si la mesure (de Haar) de A est positive, alors $A = T^1$.

Démonstration : Soit $\beta \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\beta \in A$, A est invariant par R_β qui est ergodique, donc la mesure de A est 1. Si on avait $T^1 - A \neq \emptyset$, alors, soit $x \in T^1 - A$, $x + A \subset T^1 - A$ est de mesure nulle, donc A aussi, donc $T^1 - A \neq \emptyset$ est impossible, il suit que $A = T^1$. ∎

Fin de la démonstration de 3.5 : Raisonnons par l'absurde. Si $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ est de mesure positive, on aurait $\rho(\mathrm{Cent}(f)) = T^1$.
Or il en résulterait que $0 \to \mathrm{Cent}^r(f) \underset{\sim}{\overset{\rho}{\hookrightarrow}} \mathrm{Cent}^0(f) \cong T^1$.
Par Montgomery - Zippin [1, 5.1] on aurait, comme T^1 est un groupe de Lie et que $\mathrm{Cent}^r(f)$ est compact pour la C^0-topologie, alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ est compact pour la C^r-topologie (cela résulte aussi du théorème du graphe fermé de Martineau [1]).
Or, par hypothèse, f n'est pas C^r-conjugué à R_α, donc $H_r(f) = +\infty$ (si f n'est pas C^∞-conjugué il existe un r tel que f n'est pas C^r-conjugué à R_α) ce qui est contraire au fait que $\mathrm{Cent}^r(f)$ est compact dans la C^r-topologie.
Il n'est donc pas possible que $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ soit de mesure de Haar positive, il est donc de mesure nulle. ∎

Remarque : On voit facilement que sous les conditions de 3.5 $\mathrm{Cent}^r(f)$ est totalement discontinu pour la C^r-topologie.

3.6 On reprend les notations de 1.10. On a le

Théorème : Il est générique dans F^∞ pour la C^∞-topologie

a) d'être C^0-conjugué à une translation irrationnelle de façon non absolument continue ;

b) d'avoir un centralisateur C^∞ ayant la puissance du continu.

Démonstration : La propriété a) est générique par 1.11.
Pour voir que la propriété b) l'est, il suffit, par 3.2, de voir que $K_\infty^{-1}(0) \cap F^\infty$ est résiduel dans F^∞ pour la C^∞-topologie.
Or $G = K_\infty^{-1}(0) \cap F^\infty$ est un G_δ par la semi-continuité supérieure de K_∞. Il reste à voir que G est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie.
Soit $O^\infty = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} O_\alpha^\infty$ (i.e. les difféomorphismes de $D^\infty(T^1)$ qui sont C^∞-conjugués à une translation).
On a $O^\infty \subset F^\infty$ et si $f \in O^\infty$, $K_\infty(f) = 0$ (par 3.1).
Le théorème 3.6 résulte alors de la proposition suivante :

3.7 Proposition : O^∞ est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie.

Démonstration : Soient DB les nombres $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ de densité bornée. On a par III.6.3.3, $\bigcup_{\alpha \in DB} F_\alpha^\infty$ est dense dans F^∞ pour la C^∞-topologie. Or par le théorème fondamental IX.6.1, si $\alpha \in DB$,

$$O_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty \ ,$$

et il résulte que $\bigcup_{\alpha \in DB} O_\alpha^\infty$ est donc dense dans F^∞. ∎

CHAPITRE XIII

QUELQUES EXEMPLES SUR T^n

Plan :

1. Généralités sur la fonction rotation sur T^n.
2. Difféomorphismes préservant une mesure
3. Etudes des invariants H_r sur $D^r(T^n)$
4. Etude de l'équation linéarisée
5. Groupe skew produit et perte de différentiabilité
6. Etude du voisinage $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ de VII.2
7. Quelques propriétés génériques des $\bar{O}^\infty(\Omega)$.

Commentaire :

L'exemple 1.3 et 5.7.3 est de Furstenberg [1], 3.1 s'inspire de T. Saito [1], 2.6.1 et 2.6.2 ont, semble-t-il été remarqués la première fois par W. Thurston [1].

Dans le VII.2, on est amené à penser qu'il doit exister un invariant de C^o conjugaison analogue au nombre de rotation sur T^1. Le point important est évidemment III.4.1.1.

En 1. nous faisons quelques remarques sur la généralisation immédiate. 1.4 montre que l'existence d'un vecteur de rotation est une condition nécessaire de C^o-conjugaison à une translation.

En 2. on propose pour les groupes préservant une mesure, une autre définition du vecteur de rotation.

En 5. on montre qu'il existe dans $D^r(T^n)$ $n \geq 2$ des exemples très simples de difféomorphismes conjugués à des translations

ergodiques avec perte de différentiabilité. Ces exemples sont construits de la manière suivante : à partir de l'équation linéarisée sur T^{n-1} (i.e. $\psi \to \psi - \psi_\circ R_\alpha$) dont l'étude (en 4.) est très simple par série Fourier, on construit des difféomorphismes de T^n par skew-produit et les propriétés de perte de différentiabilité de l'équation linéarisée s'interprètent comme une propriété de conjugaison du difféomorphisme.

6. est certainement, nous semble-t-il, le paragraphe le plus intéressant. L'exemple s'inspire de 2.6.5 exemple 1. L'exemple construit montre que sur T^3 pour $\alpha \in \mathbb{R}^3$, le voisinage $V_R^{2\theta}$ de VII.2 ne peut pas être remplacé par un ouvert C^1. Il serait intéressant d'avoir un tel exemple sur T^2 (si c'est possible) mais notre méthode ne convient pas d'après Saito [2] et Sternberg [1]. Noter que l'exemple construit en 6. n'est pas uniquement ergodique (!). Cet exemple de 6. ainsi que les contre-exemples au théorème du twist ont amené l'auteur à penser pendant longtemps que la conjecture d'Arnold posait un problème et que sa véracité devait utiliser fondamentalement des propriétés du cercle et donc ne résultait pas seulement des techniques des petits dénominateurs.

5.7.4 montre que sur T^n, $n \geq 2$ en certain sens, le théorème de Denjoy est bien faux; contrairement à T^1, il faut contrôler toute l'équation linéarisée et le $K_o = 0$ ne suffit plus (voir pour cela 7)

Rappelons un petit paradoxe:sur l'équation linéarisée, le théorème de Denjoy semble faux.

---

1. GENERALITES SUR LA FONCTION ROTATION SUR T^n

1.1 Généralités : Soit $f = Id + \varphi \in D^0(T^n)$, et soit $\bar{f}$ l'homomorphisme induit sur T^n. On a par récurrence sur l'entier k

$$f^k = Id + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

donc

$$\frac{f^k - Id}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

Soit μ une mesure de probabilité sur T^n invariante par $\bar{f}$, $\frac{f^k - Id}{k}$ est une somme de Birkoff =

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ \bar{f}^i \qquad \text{avec } \varphi \in C^0(T^n, \mathbb{R}^n) .$$

Il suit du théorème ergodique que μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{f^k - Id}{k}(x)$ converge si $k \to +\infty$ vers une fonction de $L^\infty(T^n, \mathbb{R}^n, \mu)$. Donc il existe au moins un $x \in \mathbb{R}^n$ tel $\lim_{k \to +\infty} \frac{f^k - Id}{k}(x)$ existe.

1.2 La limite n'est en général pas constante

Ce qui contraste avec T^1, c'est que II.2.2 est faux .

Exemple : Soit $f \in D^\omega(T^2)$ définie par

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + \varphi(x_2), x_2) \text{ et } \varphi \in C^\omega(T^1), \varphi \text{ non constante.}$$

On a alors

$$f^k(x_1, x_2) - (x_1, x_2) = (k\varphi(x_2), 0).$$

1.3 La proposition qui va suivre est de Furstenberg [1]. Pour la commodité du lecteur nous donnons une démonstration.

Proposition : Il existe $f \in D^{\omega}(T^3)$ et $x_o \in \mathbb{R}^3$ tels que quand $k \to +\infty$ $\frac{f^k - Id}{k}(x_o)$ n'ait pas de limite.

Démonstration : a) Construction d'une $f_1 \in D^{\omega}(T^2)$.
Soit $f_1(x_2, x_3) = (x_2 + \varphi(x_3), x_3 + \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (suffisamment Liouville), $\int_{T^1} \varphi(x_3) dx_3 = 0$, $\varphi \in C^{\omega}(T^1)$, et on suppose qu'il existe $\psi \in L^2(T^1, dx)$ tel que $\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi$ mais qu'il n'existe pas de ψ dans $C^o(T^1)$ vérifiant

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi$$

La construction de α, et de φ est classique par série Fourier .

b) Le $\bar{f}_1$ ainsi construit est alors sur T^2 un difféomorphisme minimal (i.e. l'orbite de tout point est dense). Pour ceci voir 5.7.3.

c) Il existe $\varphi_1 \in C^{\omega}(T^1)$ et $y \in \mathbb{R}^2$, tel que si $k \to +\infty$ $(\frac{1}{k} \sum_{i=o}^{k-1} \varphi_1 \circ f_1^i)$ (g) n'ait pas de limite.

Preuve de c) : Soit (φ_i) une suite de fonctions de $C^{\omega}(T^1)$ dense $C^o(T^1)$ pour la C^o-topologie .
Supposons par l'absurde que pour tout i et tout $x \in T^2$ $(\frac{1}{k} \sum_{j=o}^{k-1} \varphi_i \circ \bar{f}_1^j)(x)$ converge donc simplement vers la fonction $\tilde{\varphi}_i : T^2 \to \mathbb{R}$.

$\tilde{\varphi}_i$ est alors de 1ere classe de Baire (comme limite simple de fonctions continues), et a donc un point de continuité. Or, $\tilde{\varphi}_i$ est invariante par $\bar{f}_1$ qui est minimal, ce qui implique que $\tilde{\varphi}_i$ est constante.

Par suite, pour tout i, si $k \to +\infty$ $\frac{1}{k} \sum_{j=o}^{k-1} \varphi_i \circ \bar{f}^j$ converge simplement vers une constante. Ceci implique, puisque (φ_i) est dense dans $C^o(T^1)$, que $\bar{f}_1$ est uniquement ergodique; comme $\bar{f}_1$ laisse invariante la

mesure de Haar, m, de T^2 ; $\bar{f}_1$ est donc m-ergodique (et strictement ergodique).

Soit $g(x_1,x_2) = (x_2 + \psi(x_3), x_3) \pmod{\mathbb{Z}^2}$ $g : T^2 \to T^2$ préserve la mesure m (et de plus g et g^{-1} sont m-bimesurables).
On a

$$g \circ f_1 \circ g^{-1} = R_{(0,\alpha)}$$

avec

$$R_{0,\alpha}(x_2,x_3) = (x_2, x_3 + \alpha) .$$

Or $R_{(0,\alpha)}$ n'est pas m-ergodique; l'affirmation c) en résulte.

d) Construction de f

Soit $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + \varphi_1(x_1,x_2,x_3), x_2 + \varphi(x_3), x_3 + \alpha)$ et $x_o = (0,y) \in \mathbb{R}^3$ alors si $k \to +\infty$

$$\frac{f^k - Id}{k}(x_o)$$

n'a pas de limite . ∎

Remarque : Le difféomorphisme de T^2, $\bar{f}_1$ construit en a) est minimal, préserve la mesure de Haar de T^2, mais n'est pas m-ergodique.

1.4 Proposition : Soit $f \in D^o(T^n)$; on suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$, telle que $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f^k - kc - Id|_o < +\infty$. Alors si $h = g^{-1} \circ f \circ g$, avec $g \in D^o(T^n)$, on a

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |h^k - kc - Id|_o < +\infty$$

Démonstration : On écrit $g^{-1} = Id + \varphi$ avec $\varphi \in C^o(T^n, \mathbb{R}^n)$. On a

$$h^k = f^k \circ g + \varphi(f^k \circ g)$$

donc

$$\sup_k |h^k - kc - Id|_o \leq \sup_k |f^k - Id - kc|_o + |\varphi|_o + |g - Id|_o < +\infty . \quad ∎$$

1.5 Remarque : Si f est C^o conjugué à R_α alors on a

$$\sup_k |f^k - k\alpha - Id|_o < +\infty$$

et donc si $k \to +\infty$ $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

1.6 La proposition qui va suivre montre que si on met une hypothèse analogue à II.2.2 alors on a un vecteur de rotation qui est un invariant de C^o conjugaison.

Proposition : Soit $f \in D^o(T^n)$ vérifiant

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |f^k - Id - f^k(0)|_o = a < +\infty$$

alors

(1) Si $k \to +\infty$, $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers un élément $\rho(f) \in \mathbb{R}^n$

(2) $\sup_k |f^k - Id - k\rho(f)|_o \leq 2a$

Démonstration : Evidemment (2) implique (1).
Soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. On a si $f = Id + \varphi$

$$f^k - Id - k\mu(\varphi) = \sum_{i=o}^{k-1} (\varphi - \mu(\varphi)) \circ f^i$$

Soit $(f^k - Id - k\mu(\varphi))_j$ la $j^{ème}$ composante de $f^k - Id - k\mu(\varphi)$. Puisque $\mu((f^k - Id - k\mu(\varphi))_j) = 0$ et puisque $Max(f^k - Id - k\mu(\varphi)_j - Min(f^k - Id - k\mu(\varphi))_j \leq 2a$ on a bien

$$|f^k - k\mu(\varphi) - Id|_o \leq 2a$$

(Rappelons que $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sup_i |x_i|$).

Si $k \to +\infty$, $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers $\mu(\varphi) = \rho(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ et donc cela ne dépend pas du choix de μ. ∎

1.7 Remarque : Dans la proposition 1.6, la propriété (2) n'est pas une conséquence de (1), comme le montre l'exemple suivant;
Soit $\varphi \in C^o(T^1)$ avec $\int_{T^1} \varphi(x)dx = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ telles qu'il n'existe pas de $\psi \in C^o(T^1)$ vérifiant $\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi$.
Soit $f \in D^o(T^2)$ définie par

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + \varphi(x_2), x_2 + \alpha)$$

On a

$$f^k - Id = (\sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha}, k\alpha)$$

Si $k \to +\infty$, $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers $(0,\alpha) \in \mathbb{R}^2$, mais

$$\sup_k |f^k - Id - (0,k\alpha)|_o = \sup_k |\sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha}|_o = +\infty$$

car sinon d'après IV.4.1, il existerait $\psi \in C^o(T^1)$ vérifiant $\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi$ ce qui est contraire au choix de φ.

2. DIFFEOMORPHISMES PRESERVANT UNE MESURE

Rappelons que si $f = Id + \varphi \in D^o(T^1)$ et si μ est une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$, on a (II.2.6) :

$$\rho(f) = \mu(\varphi)$$

C'est cette définition que nous proposons de généraliser .

2.1 Définition de $D^r_\mu(T^n)$.

Soit μ une mesure de probabilité sur T^n et

$$D^r_\mu(T^n) = \{f \in D^r(T^n) \mid \bar{f}_*\mu = \mu\}$$

$D^r_\mu(T^n)$ est évidemment un sous-groupe fermé de $D^r(T^n)$.
Alors on définit

$$\rho_\mu : D^r_\mu(T^n) \to \mathbb{R}^n$$
$$f \longrightarrow \int_{T^n} (f - Id)d\mu$$

On voit facilement que ρ_μ est un homomorphisme de groupe par le même calcul qu'en II.2.11 et que

$$\rho_\mu(R_p \circ f) = p + \rho_\mu(f) \quad \text{si } p \in \mathbb{Z}^n .$$

si $\mu = m$ est la mesure de Haar de T^n, on a donc un homomorphisme continu surjectif

$$\rho_m : D^r_m(T^n) \to \mathbb{R}^n \to 0$$

tel que

$$\rho_m(R_\alpha) = \alpha \in \mathbb{R}^n .$$

2.2 Remarque : Soit f un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à support compact, qui laisse invariante une mesure de Radon μ, alors $\mu(f - Id) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration (d'après A. Chenciner).
On voit facilement que $\mu(f^k - Id) = k\mu(f - Id)$, si $\mu(f - Id) \neq 0$ alors si $k \to +\infty$, une composante de $k\mu(f - Id)$ tend vers $\pm\infty$. Mais $f^k - Id$ est une fonction à support compact, bornée indépendamment de k, puisque f est à support compact, d'où une contradiction. ∎

2.3 Groupes $D^r_w(T^n)$ et $D^r_\Omega(T^n)$
Soit $w \in \Lambda^* T(\mathbb{R}^n)$ une forme différentielle constante (i.e. harmonique pour la métrique plate de $\mathbb{R}^n$), on suppose qu'en degré maximum

$$w|_{\Lambda n} = \Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Soit, si $r \geq 1$, le groupe $D^r_w(T^n) = \{f \in D^r(T^n) \mid f^* w = w\}$, qui est un sous-groupe fermé de $D^r(T^n)$.

On a

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow D^r_w(T^n) \hookrightarrow D^r_m(T^n)$$

On a donc un homomorphisme (continu) surjectif de groupes

$$\rho_m : D^r(T^n) \to \mathbb{R}^n \to 0$$

défini par $$f \longrightarrow \int_{T^n} (f - Id)\, dm$$

2.4 $X^r_\Omega(T^n)$

Soit $X^r_\Omega(T^n)$ l'ensemble des champs de vecteurs de T^n de divergence nulle. (On identifie canoniquement $X^r(T^n)$ avec $C^r(T^n, \mathbb{R}^n)$) .

On définit un homomorphisme d'algèbre de Lie surjectif

$$\rho_\Omega : X^r_\Omega(T^n) \to \mathbb{R}^n \to 0$$

par $$f \longrightarrow \int_{T^n} f(x)\, dx$$

Si $\varphi \in D^r_w(T^n)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur constant, on a alors

$$\rho_\Omega(\varphi_* \alpha) = \rho_\Omega(\alpha) = \alpha$$

avec

$$\varphi_* \alpha = D\varphi \circ \varphi^{-1} . \alpha \ .$$

2.5 Lemme : Soit $g \in X^r_\Omega(T^n)$, $r \geq 1$; soit $\exp(g) = f_t \in D^r_\Omega(T^n)$ le groupe à un paramètre engendré par g; alors

$$\rho_m(f_1) = \rho_\Omega(g) \ .$$

Démonstration : On écrit

$$f_t(x) = x + \alpha(t) + \varphi_t(x) \quad ,$$

avec $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\int_{T^n} \varphi_t(x)\, dx = 0$.

On a pour x fixé

$$\frac{dg_t}{dt}(x) = g(f_t(x)) \ ;$$

mais

$$\int_{T^n} g(f_t(x))dx = \int_{T^n} g(x)dx = \rho_\Omega(g)$$

puisque $x \to f_t(x)$ préserve $m = dx$.

On a aussi

$$\int_{T^n} \frac{df_t(x)}{dt}\, dx = \int_{T^n} \frac{d\alpha}{dt}\, dx + \int_{T^n} \frac{d}{dt}\varphi_t(x)dx$$

$$= \frac{d\alpha}{dt}$$

donc $\frac{d\alpha}{dt} = \rho_\Omega(g)$, soit $\alpha(t) = t\rho_\Omega(g)$ (puisque si $t = 0$, $\varphi_o(x) + \alpha(0) = 0$).

On a donc

$$\rho_m(f_1) = \alpha(1) = \rho_\Omega(g). \quad \blacksquare$$

2.6 La proposition suivante montre bien que ρ_m joue un rôle analogue à la fonction de rotation sur $\mathrm{Diff}^o_+(T^1)$. Ce qui permet de conclure à partir de la décomposition de VII.2 une conjugaison d'un f à R_α , si $\rho_m(f) = \alpha$ avec α bon et f proche de R_α. Sur T^1, on utilisait III.4.1.1.

Soit w une forme différentielle comme en 2.3.

2.6.1 Proposition : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant une condition diophantienne et soit $V^{2\theta}_{R_\alpha}$ le voisinage de R_α dans la $C^{2\theta}$-topologie déterminée par le VII.2.

Si $f \in V^{2\theta}_{R_\alpha} \cap D^\infty_w(T^n)$ et $\rho_m(f) = \alpha$ alors

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad \text{avec } g \in D^\infty_w(T^n).$$

On a le lemme suivant de W. Thurston [1]

2.6.2 Lemme : Soit $g \in D^\infty(T^n)$, et $\omega_i \in \Lambda^i(\mathbb{R}^n)$ une forme constante sur $\mathbb{R}^n$ de degré i. Si R_α est sur T^n une translation ergodique, et si

$$(g^{-1} \circ R_\alpha \circ g)^* w_i = w_i$$

alors $\bar{g}^* w_i = w_i$.

Démonstration : On a sur T^n : $(\bar{g}^{-1} \circ R_\alpha \circ \bar{g})^* w_i = w_i$. Soit

$$R_\alpha^* \bar{g}^* w_i = \bar{g}^* w_i .$$

Comme la forme $\bar{g}^* w_i$ est laissée invariante par R_α^*, $\bar{g}^* w_i$ est une forme constante.
Comme $\bar{g}$ est homotope à l'Id, l'intégrale de $\bar{g}^* w_i$ sur un cycle de $\bar{g}^* w_i$ est égale à l'intégrale de w_i sur le même cycle, d'où il résulte que

$$\bar{g}^* w_i = w_i . \quad \blacksquare$$

2.6.3 Remarque : Si $g \in \mathrm{Diff}_o^o(T^n)$ et si $g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ laisse invariant la mesure m de Haar de T^n et si R_α est sur T^n une translation ergodique alors on a

$$g_* m = m .$$

Démonstration de 2.6.1 : Par le VII.2, il existe $g \in D^\infty(T^n)$ et R_λ tels que

$$f = R_\lambda \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$$

Or $R_{-\lambda} \circ f$ préserve la forme w, donc d'après le lemme précédent $g \in D_w^\infty(T^n)$. On a donc

$$\rho_m(f) = \rho_m(R_\lambda) + \rho_m(R_\alpha) = \lambda + \alpha$$

Or $\rho_m(f) = \alpha$, donc $\lambda = 0$ et par conséquent

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad \text{avec} \quad g \in D_w^\infty(T^n). \quad \blacksquare$$

2.6.4 Remarque : On a une proposition que je n'énonce pas en C^r avec perte de différentiabilité, en C^ω, et aussi sur les champs de vecteurs de divergence nulle (voir XVI).

2.6.5 ρ_m est très loin d'être l'unique invariant de conjugaison.

Exemple 1 : Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^n$ et le champ de vecteur

$$g = (\alpha_1 + a_1 \cos 2\pi(x_1 + x_2) + a_2 \cos 2\pi(x_1 - x_2), \alpha_2 - a_1 \cos 2\pi(x_1 + x_2) + a_2 \cos 2\pi(x_1 - x_2))$$

g est de divergence nulle, choisissons a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}\{0\}$ tel qu'il existe $x_o \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $g(x_o) = 0$. Soit f_t le groupe a un paramètre engendré par g. On a

$$\rho_m(f_1) = \rho_\Omega(g) = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

mais $f_1(x_o) = x_o$ (i.e. f_1 a x_o comme point fixe) et il n'est donc pas C^o conjugué à R_α.

Exemple 2 : Soit

$$g_1(x_1, x_2) = (x_1 + a \sin 2\pi x_2 , x_2)$$

et

$$g_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + a \sin 2\pi x_1) .$$

On suppose $a > 0$. Alors $f = g_1 \circ g_2^{-1}$ préserve la forme $dx_1 \wedge dx_2$. Mais pour tout $\lambda \in T^2$

$$R_\lambda \circ \bar{f} \quad \text{a un point fixe sur } T^2.$$

3. ETUDE DES INVARIANTS H_r SUR $D^r(T^n)$

On a la proposition suivante qui généralise T. Saito [1].

3.1 Proposition : Soit $f \in D^o(T^n_k)$ tel que la suite $\{f^k | k \in \mathbb{Z}\}$ soit équicontinue, alors si $k \to +\infty$, $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}^n$. Si R_α sur T^n est une translation ergodique, alors f est

C^o conjugué à R_α.

Démonstration : On a la famille

$$\{f^k - Id - f^k(0) \in C^o(T^n, \mathbb{R}^n) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

est aussi équicontinue et bornée en 0; par Dieudonné [1, VII.5.Ex.11] , elle est bornée :

$$\sup_k |f^k - f^k(0) - Id|_o < +\infty$$

et par 1.6 si $k \to +\infty$, $\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément vers $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}^n$.

Considérons pour $k \in \mathbb{N}$

$$S_k(f) = \sum_{i=o}^{k-1} \frac{f^i - i\alpha}{k}$$

la famille $\{S_k(f) - Id \mid k \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue, par 1.6 elle est bornée, donc relativement compacte par le théorème d'Ascoli; il existe donc une suite d'entiers $k_i \to +\infty$ si $i \to +\infty$ telle que $S_{k_i}(f) - Id$ converge uniformément vers

$$\varphi \in C^o(T^n, \mathbb{R}^n)$$

(lorsque $k_i \to +\infty$) . Soit $g = Id + \varphi$. On a

$$S_{k_i}(f) \circ f = \alpha + S_{k_i}(f) + \frac{f^{k_i} - Id - k_i\alpha}{k_i}$$

Mais d'après 1.6

$$\sup_k |f^k - Id - k\alpha|_o < +\infty$$

Si $k_i \to +\infty$, on a par passage à la limite

$$g \circ f = R_\alpha \circ g.$$

Par suite, si $k \in \mathbb{Z}$,

$$g \circ f^k = R_{k\alpha} \circ g$$

C'est maintenant que l'hypothèse disant que R_α est une translation ergodique de T^n intervient. (On suit Saito [1]). Soit G l'adhérence de $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dans $C^o(T^n, T^n)$; G est en fait contenu dans $\mathrm{Diff}_o^o(T^n)$ par Bourbaki [3, § 3, n° 5] .

G est donc un sous-groupe abélien compact de $\mathrm{Diff}_o^o(T^n)$. Comme $\bar{g} \circ \bar{f}^k = R_{k\alpha} \circ \bar{g}$ et puisque R_α est une translation ergodique de T^n, on a $\bar{g}(T^n) = T^n$. Soit $x_o \in T^n$, avec $g(x_o) = 0$. Soit G_{x_o} le stabilisateur de x_o pour l'action $G \times T^n \to T^n$. On a

$$\bar{g}(\bar{f}^k(x_o)) = k\alpha \in T^n \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{Z} .$$

$\bar{g}$ est un homomorphisme uniformément continu du sous-groupe $\{\bar{f}^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset G$ dans le groupe T^n. $\bar{g}$ se prolonge en un homomorphisme continu de G dans T^n.
Soit $g_1 : H = G/G_{x_o} \to T^n$ induit par $\bar{g}$. Comme $\{k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans T^n, on a

$$g_1(H) = T^n .$$

<u>Montrons que</u> g_1 <u>est un homéomorphisme</u>.
On note par $\hat{H}$ le dual de H, au sens de Pontryagin [1] (on groupe des caractères de H). Comme G/G_{x_o} se plonge comme un compact de T^n (c'est l'orbite de x_o par G sur T^n).

La dimension topologique de H est donc $\leq n$. Comme $g_1 : H \to T^n \to 0$, on a $0 \to \mathbb{Z}^n \to \hat{H}$. On conclut d'après Pontryagin [1 , section 38] que dimension (H) = rang(H) = n, donc H a un point intérieur dans T^n. D'après Pontryagin [1 , section 38, B] et par la structure de groupe, H est donc ouvert en tout point ; comme H est compact, $H = T^n$.

Si on désigne par $\Phi : H \to T^n : (h \to h \cdot x_o)$, on conclut que Φ est un homéomorphisme (et de plus $\{f^k(x_o) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans T^n).
Or on a

$$g_1 = g \circ \Phi .$$

Comme $\bar{g}$ est homotope à l'Id, on conclut que $g_1^* : \pi_1(H) \to \pi_1(T^n)$ est un isomorphisme, puisque g_1 est un homomorphisme continu de H sur T^n qui induit un isomorphisme sur le π_1 , g_1 est donc bien un homéomorphisme. $g = g_1 \circ \Phi^{-1}$ est un homéomorphisme, comme $\bar{g} \circ \bar{f} = R_\alpha \circ \bar{g}$, f est C^0 conjugué à R_α. ∎

Remarque : Soit $f \in \mathrm{Diff}_0^0(T^n)$, tel que $\mathbb{Z}_f = \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit équicontinue; si $\tilde{f}$ est un relèvement de f, il n'est pas difficile de voir que $\mathbb{Z}_{\tilde{f}} = \{\tilde{f}^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est équicontinue dans $D^0(T^n)$.

Pour la définition de H_r, se rapporter à IV.1.2.

3.2 Proposition : Soit $1 \leq r \leq +\infty$, et $f \in D^r(T^n)$ avec $H_r(f_1) < +\infty$ si r est fini (et $H_k(f_1) < +\infty$ pour tout k si $r = +\infty$). Alors si $k \to +\infty$ $\frac{f^k - \mathrm{Id}}{k}$ converge uniformément vers $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}^n$. Si R_α est sur T^n une translation ergodique, alors f est C^{r-1} conjugué à R_α : $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$. De plus, $D^{r-1}g$ est lipschitzienne.

Démonstration : 1) Cas où r = 1

Alors $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est équicontinue dans $D^0(T^n)$ et on applique la proposition précédente :

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad \text{avec } g \in D^0(T^n).$$

D'après IV.5.1, si on pose

$$S_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^i - i\alpha}{k} \quad ,$$

$S_k(f)$ converge uniformément quand $k \to +\infty$, vers $R_c \circ g$ dans la C^0-topologie, avec

$$c = \int_{T^n} \varphi_{-1}(x)\,dx \quad \text{si} \quad g^{-1} = \mathrm{Id} + \varphi_{-1}$$

Comme en IV.6.3.1., on conclut que g est lipschitzienne (mais je ne sais pas si g^{-1} est lipschitzienne).

2) Cas où r = 2

Puisque $H_2(f) < +\infty$. Considérons $DS_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{Df^i}{k}$. $(DS_k(f))$ est équicontinue puisque $\rho = \sup_k |D^2 f^k|_0 < +\infty$, et même

$$|DS_k(f)(x) - DS_k(f)(y)| \leq \rho |x-y| \quad (*) .$$

Comme toute dérivée partielle d'une fonction de $C^1(T^n)$ s'annule en au moins un point, on voit facilement que $(DS_k(f))$ est une suite de fonctions équicontinue et bornée, donc d'adhérence compacte dans $C^o(T^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ pour la C^o-topologie. Soit (k_i) une suite d'entiers telle que si $i \to +\infty$, $DS_{k_i}(f)$ converge uniformément vers h. g est continuement dérivable et $Dg = h$; de plus, par passage à la limite dans $(*)$, on conclut que h est lipschitzienne.
Montrons que g est un difféomorphisme de classe C^1. On a

$$g \circ f = R_\alpha \circ g ,$$

mais g est continuement dérivable donc

$$\text{Det } Dg \circ f \,.\, \text{Det } Df = \text{Det } D_g .$$

Comme $\text{Det } Df > 0$, s'il existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{Det } Dg(x_o) = 0$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Det } Dg(f^n(x_o)) = 0 .$$

f étant C^o conjugué à R_α, qui est sur T^n une translation ergodique, $\{f^k(x_o) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans T^n.
Comme Det Dg est continue, on a donc

$$\text{Det } Dg \equiv 0$$

Or, g étant un homéomorphisme continuement dérivable, $\text{Det } Dg \equiv 0$ est absurde; il suit que $\text{Det } Dg > 0$ et $g \in D^1(T^n)$.
On démontre, pour $r \geq 3$ la proposition de façon analogue.
Si $r = +\infty$, il suffit de voir que f est C^r conjugué à R_α pour k fini par II.3.3.

3.3 Difféomorphisme H^s

Pour les définitions des espaces H^s, voir Ebin [1]. Soit pour s entier $s > \frac{n}{2} + 1$

$$DH^s(T^n) = \{f = Id + \varphi \in D^1(T^n) \mid \varphi \in H^s(T^n, \mathbb{R}^n)\}$$

Pour la topologie H^s, $DH^s(T^n)$ est un groupe topologique par Ebin [1]. Soit $H_{H^s}(f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |Df|_{H^{s-1}} \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Remarquons que si f est conjugué dans $DH^s(T^n)$ à R_α alors $H_{H^s}(f) < +\infty$.

3.3.1 Proposition : Soit $f \in DH^s(T^n)$ avec $H_{H^s}(f) < +\infty$, alors $\lim_{k\to+\infty} \frac{f^k - Id}{k} = \alpha \in \mathbb{R}^n$, et si R_α est sur T^n une translation ergodique f est conjugué à R_α dans $DH^s(T^n)$.

Commençons par un lemme .

3.3.2 Lemme : Soit B un espace de Banach réflexif de norme $|.|$, soit $A : B \to B$ linéaire continue. Soit $\varphi \in B$ avec

$$\sup_n \left| \sum_{i=o}^{n-1} A^i \varphi \right| < +\infty$$

alors il existe $\psi \in B$ tel que $\psi - A\psi = \varphi$.

Démonstration : (D'après Petersen [1]).

Soit C l'enveloppe convexe des $\left(\sum_{i=o}^{n-1} A^i \varphi \right)_{n\in\mathbb{N}}$. C est convexe compact pour la topologie faible et l'application $L : \psi \to A\psi + \varphi$ est faiblement continue et laisse C invariant. Par un théorème de point fixe (par exemple Markov-Kakutani version affine), L a un point fixe : $L(\psi) = \psi$ soit encore

$$A\psi + \varphi = \psi$$

Donnons une autre démonstration si B est séparable. Cette autre démonstration, nous semble-t-il, explique IV.5.1. La boule unité de B est alors faiblement compacte et métrisable ; soit

$$\psi_n = \frac{1}{n}(\varphi + \ldots + \sum_{i=o}^{n-1} A^i \varphi)$$

Comme $\sup_n |\psi_n| < +\infty$, il existe une suite d'entiers (n_i) tel que si $i \to +\infty$ $(n_i \to +\infty)$ ψ_{n_i} converge faiblement vers un $\psi \in B$. On voit facilement que

$$A\psi + \varphi = \psi. \quad \blacksquare$$

Remarque : Le lemme est inexact si B n'est pas réflexif.

Exemple : Soit $0 < a < \frac{1}{2\pi}$ fixé et $f(x) = x + a \sin 2\pi x$ et $\varphi = \sin 2\pi x \in C^0(T^1)$. On a $\sup_n \left| \sum_{i=o}^{n-1} \varphi \circ f^i \right|_o < +\infty$ par II.2.5 (inégalité des nombres de rotation) mais il n'existe pas de $\psi \in C^0(T^1)$ tel que

$$\psi - \psi \circ f = \varphi \ .$$

3.3.3 Démonstration de 3.3.1

Comme $s > \frac{n}{2} + 1$, $H_{H^s}(f) < +\infty$ implique que $H_1(f) < +\infty$ et, d'après 3.2, $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^0(T^n)$; il reste à montrer que $g \in DH^s(T^n)$. Si on écrit $f = Id + \varphi + \alpha$, on a pour k entier

$$f^k - Id - k\alpha = \sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

On déduit de 1.6 et de l'hypothèse $H_{H^s}(f) < +\infty$ que

$$\sup_k \left| \sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ f^i \right|_{H^s} < +\infty \quad .$$

Or $H^s(T^n, \mathbf{R}^n)$ est réflexif (même Hilbertisable), donc, par le lemme précédent, il existe $\psi \in H^s(T^n, \mathbf{R}^n)$ vérifiant $\psi \circ f - \psi = \varphi$. Si $g = Id + \psi$, on a

$$g \circ f = R_\alpha \circ g$$

Puisque $s > \frac{n}{2} + 1$, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est de classe C^1. Or f est C^0 conjugué à R_α avec R_α sur T^n, est une translation ergodique, par une démonstration identique à celle de 3.2 (cas de r = 1) on montre

$$g \in D^1(T^n) \text{ et donc } g \in DH^s(T^n). \quad \blacksquare$$

Remarque : C'est finalement la non-réflexivité de $C^0(T^1)$ qui a compliqué la démonstration de V.6.4 (!).

3.4 Définition de H'_r : Soit $D^r_m(T^n)$. Par l'exemple 1.2 et 1.7, il est naturel d'introduire un invariant H_o. Soit pour $0 \leq r < +\infty$ entier l'invariant H'_r

$$D^r_m(T^n) \to \bar{\mathbb{R}}$$

$$f \longrightarrow \sup_{k \geq 1} \left| f^k - Id - k\rho_m(f) \right|_{C^r} = H'_r(f)$$

$H'_r : D^r_m(T^n) \to \bar{\mathbb{R}}$ est évidemment semi continue inférieurement pour la C^r-topologie. Par 1.5 et IV 1.1, on a la

3.4.1 Proposition : Si $f \in D^r_m(T^n)$ est C^r conjugué dans $D^r(T^n)$ à R_α alors $\rho_m(f) = \alpha$ et $H'_r(f) < +\infty$.

3.4.2 Remarque : Par 2.6.3, si $f \in D^r_m(T^n)$ et si $\rho_m(f) = \alpha$ est tel que R_α soit sur T^n une translation ergodique, il est équivalent que f soit C^r-conjugué à R_α dans $D^r(T^n)$ ou dans $D^r_m(T^n)$.

3.4.3 Remarque : Si $n = 1$ (i.e. sur T^1) on n'a pas besoin d'invariant H_o par l'inégalité du nombre rotation II.2.5.

Si $1 \leq r < +\infty$, l'invariant H_r a un sens sur $D^r(T^n)$ sans avoir besoin de vecteur de rotation.

4. ETUDE DE L'EQUATION LINEARISEE

4.1 On considère $C^r_o(T^n) = \{\varphi \in C^r(T^n) \mid \int_{T^n} \varphi(x)dx = 0\}$ et une translation ergodique R_α de T^n. Soit $0 \leq r \leq \omega$ et

$$L^r_\alpha : C^r_o(T^n) \to C^r_o(T^n)$$

$$\psi \longrightarrow \psi - \psi \circ R_\alpha .$$

Si on se donne $\varphi \in C^r_o(T^n)$ on cherche à résoudre en ψ

$$\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi .$$

4.2 Remarque : Pour tout $0 \le r \le \omega$, $\operatorname{Im} L_\alpha^r$ est dense dans $C_o^r(T^n)$ puisqu'il contient les polynômes trigonométriques d'intégrale nulle.

4.3 Proposition : Soient $0 \le r \le +\infty$, et α tel que R_α soit une translation ergodique sur T^n. L'ensemble des $\varphi \in C_o^r(T^n)$ tels que

$$\inf_{k \ge 1} \left(\left| \sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha} \right|_{C^r} \right) = 0$$

est un G_δ dense dans $C_o^r(T^n)$ pour la C^r-topologie.

Démonstration : Par un argument de semi-continuité inférieure appliqué à

$$\varphi \to \inf_{n \ge 1} \left(\left| \sum_{o}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha} \right|_{C^r} \right) = K'_r(\varphi) ,$$

$G = (K'_r)^{-1}(0)$ est G_δ dans $C_o^r(T^n)$. G est dense dans $C_o^r(T^n)$ puisqu'il contient les polynômes trigonométriques d'intégrale nulle : si $\varphi = \varphi_1 \circ R_\alpha - \varphi_1$ avec $\varphi_1 \in C^r(T^n)$ alors $\sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ R_{i\alpha} = \varphi_1 \circ R_{k\alpha} - \varphi_1$ et il suffit de choisir une suite d'entiers $k_i \to +\infty$ tel si $i \to +\infty$, $k_i \alpha \to 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ alors

$$\left| \varphi_1 \circ R_{k_i \alpha} - \varphi_1 \right|_{C^r} \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty . \qquad \blacksquare$$

4.4 Proposition ♦ : Soit $0 \le r < +\infty$. Pour tout α tel que R_α soit une translation ergodique sur T^n (resp. α non de type constant), et tout p entier avec $0 \le p \le n-1$ (resp. $0 \le p \le n$), $\operatorname{Im} L_\alpha^{r-p} \cap C_o^r(T^n)$ est maigre dans $C_o^r(T^n)$ pour la C^r-topologie.

Démonstration : D'après IV.4.1 et l'unicité, on voit que $\varphi \in \operatorname{Im} L_\alpha^{r-p}$ si et seulement si

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=o}^{k} \varphi \circ R_{i\alpha} \right|_{C^{r-p}} < +\infty .$$

Par un argument de semi continuité, $\operatorname{Im} L_\alpha^{r-p} \cap C_o^r(T^n)$ est un F_σ dans $C_o^r(T^n)$ pour la C^r-topologie. Par la structure d'e.v.t. de $C_o^r(T^n)$,

---

♦ Y. Meyer a montré que la perte de différentiabilité est génériquement de n même si α est de type constant.

si $\mathrm{Im}L_\alpha^{r-p} \cap C_o^r(T^n) \neq C_o^r(T^n)$ alors $\mathrm{Im}L_\alpha^{r-p} \cap C_o^r(T^n)$ est maigre dans $C_o^r(T^n)$.

Construction d'un $\varphi \in C_o^r(T^n)$, avec $\varphi \notin \mathrm{Im}\, L_\alpha^{r-p}$.

La construction d'un tel φ se fait par série de Fourier.
Remarquons que, si $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ avec $\psi \in C^{r-p}(T^n)$, et si $\hat{\psi}(k)$ sont les coefficients de Fourier de $\psi \in C^o(T^n)$ avec $k \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$|\hat{\varphi}(k)| = O(\|<k,\alpha>\| / |k|^{r-p}), \qquad (+)$$

où $|k| = \sup_i |k_i|$ et $<k,\alpha> = \Sigma\, k_i\, \alpha_i$, $\|\ \|$ étant la métrique de groupe de T^1.

Pour construire φ, il suffit de construire φ qui ne vérifie pas (+).

Rappelons par le principe de Dirichlet V.2 qu'il existe une suite de $k_i \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, avec $|k_i| \to +\infty$ si $i \to +\infty$, telle que

$$\|<k_i,\alpha>\| \leq \frac{1}{|k_i|^n}$$

(resp. si α n'est pas de type constante

$$\|<k_i,\alpha>\| \leq \frac{\psi(k_i)}{|k_i|^n} \quad \text{avec } \psi(k_i) \to 0 \text{ si } i \to +\infty\ )$$

On choisit alors des séries de Fourier lacunaires telles que $\varphi \in C_o^r(T^n)$, mais que les $|\varphi(k_i)|$ ne soient pas $O\left(\frac{1}{|k_i|^{r+1}}\right)$ (resp. $\frac{\sqrt{\psi(k_i)}}{|k_i|^r}$).

Il suffit d'extraire de la suite (k_i) une sous-suite que l'on note encore (k_i) vérifiant :

$$\Sigma_i \frac{1}{|k_i|} < +\infty \qquad (\text{resp. } \Sigma_i \sqrt{\psi(k_i)} < +\infty)$$

On pose

$$g(x) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k_j|^{r+1}} e^{2\pi i <k_j,x>} \quad \left(\text{resp. } \sum_{j \geq 1} \frac{\sqrt{\psi(k_j)}}{|k_j|^r} e^{2\pi i <k_j,x>}\right)$$

avec ici, $i = \sqrt{-1}$. $g \in C_o^r(T^n, \mathbb{C})$; si $\sigma(g)$ est le complexe conjugué de g,

$$\varphi = \frac{g + \sigma(g)}{2} \notin L_\alpha^{r-p}$$

si $p \leq n-1$ (resp. $p \leq n$) et $\varphi \in C_o^r(T^n)$. ∎

4.5 Rappelons que $\alpha \in \mathbb{R}$ est de Liouville si R_α est sur T^n une translation ergodique et si pour tout entier i, il existe $k_i \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ $|k_i| \geq 2$ tel que

$$\|\langle k_i, \alpha \rangle\| \leq \frac{1}{|k_i|^i} \quad .$$

(voir V.5).
On a la proposition suivante, de démonstration analogue à 4.4.

Proposition : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ de Liouville

$$\mathrm{Im} L_\alpha^o \cap C_o^\infty(T^n)$$

est maigre dans $C_o^\infty(T^n)$ pour la C^∞-topologie.

4.6 Soient $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et q_n les dénominateurs de réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de α. Rappelons que l'on a $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$. La proposition précise la proposition 4.3.

Proposition : Soit $\varphi \in C_o^o(T^1)$ avec φ absolument continue alors

$$\lim_{n \to +\infty} \Big| \sum_{i=o}^{q_n - 1} \varphi \circ R_{i\alpha} \Big|_o = 0 \ .$$

Démonstration : Soit $BV_o(T^1) = \{\varphi \in C_o^o(T^1) \mid \varphi \text{ sur } [0\ 1] \text{ est de variation bornée, de variation Var } \varphi\}$.
Pour la norme $|\varphi|_V = |\varphi|_o + \mathrm{Var}(\varphi)$, $BV_o(T^1)$ est une algèbre de Banach et sa topologie s'appelle topologie de la variation.
Soit $\theta : BV_o(T^1) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\varphi \longrightarrow \Big(\Big| \sum_{i=o}^{q_n - 1} \varphi \circ R_{i\alpha} \Big|_o \Big)_n \quad .$$

D'après l'inégalité de Koksma, VI.3, on a

$$\mathrm{Im}\theta \subset \ell^\infty(\mathbf{N}) = \{(x_i) \in \mathbf{R}^n \mid |x|_{\ell^\infty} = \sup_i |x_i| < +\infty\}$$

On montre facilement en utilisant l'inégalité de Koksma que pour tout f et $g \in BV_o(T^1)$ on a

$$|\theta(f) - \theta(g)|_{\ell^\infty} \leq \mathrm{Var}\,(f-g)$$

θ est donc continue.

Soit $c_o = \{(x_i) \in \ell^\infty(\mathbf{N}) \mid \lim_{i \to +\infty} x_i = 0\}$. c_o est fermé dans son bidual $\ell^\infty(\mathbf{N})$.

$\theta^{-1}(c_o)$ est donc fermé dans $BV_o(T^1)$ pour la topologie de la variation (topologie définie par la norme $|\ \ |_V$).
Si φ est un polynôme trigonométrique, $\varphi \in C^o_o(T^1)$ et

$$\theta(\varphi) \in c_o$$

Or l'adhérence de l'ensemble des polynômes trigonométriques dans $BV_o(T^1)$ est le sous espace des $\varphi \in BV_o(T^1)$ avec φ absolument continue.
Il en résulte que, si $\varphi \in C^o_o(T^1)$ avec φ absolument continue, alors $\theta(\varphi) \in c_o$. ∎

4.7 Remarque : Soit $\varphi \in C^\infty_o(T^1)$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, par 4.6, on conclut si $\sum_{i=o}^{a_n - 1} \varphi \circ R_{i\alpha} \to 0$ quand $n \to +\infty$ dans la C^∞-topologie.

5. GROUPE SKEW PRODUIT ET PERTE DE DIFFERENTIABILITE

5.1 Remarque en guise d'introduction

(1) Soit $f(x_1,x_2) = (x_1 + \varphi(x_2) + \alpha_1, x_2 + \alpha_2)$, avec $\alpha_1 \in \mathbf{R}$, $\alpha_2 \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et $\varphi \in C^o_o(T^1)$.
On suppose qu'il existe $\psi \in C^o(T^1)$ vérifiant $\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi$; soit alors $g(x_1,x_2) = (x_1 + \psi(x_2))$. On a

$$f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$$

avec $R_\alpha(x,x_2) = (x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2)$.

On peut dire que pour les f de la forme (1), le problème de conjuguer f a une translation se ramène à l'étude de l'équation linéaire (en variable de moins)

$$\psi \to \psi \circ R_{\alpha_2} - \psi = -L_{\alpha_2}(\psi) .$$

On peut ainsi interpréter "géométriquement" les résultats sur l'équation $\psi \in C^0_o(T^1) \to \psi - \psi \circ R_{\alpha_2} \in C^0_o(T^1)$ en construisant un difféomorphisme de T^2 de la forme (1).

Ansaï [1] a appelé les difféomorphismes de la forme (1) des "skew produit" (ou produit croisé). Furstenberg [1] étudie de tels skew produits en général non homotopes à l'Id. Nous proposons rapidement de donner quelques propriétés.

5.2 Définition de $SW^r(T^n)$

Soit pour $0 \leq r \in \omega$, $SW^r(T^n)$ l'ensemble des f de la forme

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1 + \varphi_1(x_2,\ldots,x_n), x_2 + \varphi_2(x_3,\ldots,x_n),\ldots,x_n + \alpha_n)$$

avec pour $1 \leq i \leq n$, $\varphi_i \in C^r(T^{n-(i+1)})$ (et $\alpha_n \in \mathbb{R}$) .

$SW^r(T^n)$ est alors un sous-groupe fermé de $D^r_m(T^n)$. Remarquons que $SW^r(T^n)$ est contractile dans la C^r-topologie.

5.3 Rappelons que si $0 \leq r < +\infty$ et $f \in SW^r(T^n)$, on pose

$$H'_r(f) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| f^k - Id - k\rho_m(f) \right|_{C^r} \in \overline{\mathbb{R}} ;$$

si $f \in SW^r(T^n)$ et $\rho_m(f) = \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. on pose

$$p(\alpha) = (\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Proposition : Soient $0 \leq r \leq +\infty$ et $f \in SW^r(T^n)$, telle que $R_{p(\alpha)}$ soit une translation ergodique sur T^{n-1}. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que f soit C^r conjugué dans $SW^r(T^n)$ à R_α est que si $0 \leq r < +\infty$, $H'_r(f) < +\infty$ et si $r = +\infty$, $H'_k(f) < +\infty$ pour tout k fini.

Remarque : Il est équivalent de dire que f est conjugué à R_α dans $SW^r(T^n)$ ou dans $D^r(T^n)$ (par la proposition et par 1.5 et 3.4.1).

Démonstration : Par 1.5 et 3.4.1 la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

On le démontre par récurrence sur n. Par n = 1, $SW^r(T^1) \cong \mathbb{R}$ et c'est trivial.

. Supposons la proposition démontrée pour n - 1. Montrons qu'elle est vraie pour n = 1.

f induit sur $\mathbb{R}^{n-1}$ un difféomorphisme $f_1 \in SW(T^{n-1})$ ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$), et il existe par récurrence $h_1 \in SW^r(T^{n-1})$ tel que

$$h_1^{-1} \circ f_1 \circ h_1 = R_{p(\alpha)} \ ;$$

soit $h \in SW^r(T^n)$ défini par $h = Id \times h_1$; on a

$$h^{-1} \circ f \circ h = (x_1 + \varphi_1(x_2,\ldots,x_n), x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n)$$

On a de plus $H'_r(h^{-1} \circ f \circ h) < +\infty$ si $0 \leq r < +\infty$ (et pour tout r fini, si $r = +\infty$) :

$$H'_r(h^{-1} \circ f \circ h) = \sup_k \Big| \sum_{i=o}^{k} \varphi_1 \circ R_{ip(\alpha)} - k\alpha_1 \Big|_{C^r} < +\infty$$

avec $\alpha = \int_{T^{n-1}} \varphi(x_2,\ldots,x_n)dx_2,\ldots,dx_n$. Par IV.4.1, il existe $\psi \in C_o^r(T^{n-1})$ tel que

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi \ .$$

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$g(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 - \psi(x_2,\ldots,x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

On a $g \in SW^r(T^n)$ et $g \circ h^{-1} \circ f \circ h \circ g^{-1} = R_\alpha$ et donc $g \circ h^{-1} \in SW^r(T^n)$.

La proposition en résulte par récurrence. ∎

5.4 Proposition : Soient $0 \leq r \leq \omega$, et $\rho(\alpha) \in \mathbb{R}^{n-1}$ satisfaisant une condition diophantienne; il existe deux entiers r_1 et r_2, $r_1 > r_2$ tels que, si $r \geq r_1$ et si $f \in SW^r(T^n)$ avec $\rho_m(f) = \alpha$ alors f est C^{r-r_2} conjugué à R_α dans $SW^{r-r_1}(T^n)$ si f est C^∞ (resp. C^ω) alors f est C^∞ (resp C^ω) conjugué à R_α.

Démonstration : Identique à celle 5.3 en utilisant VII.8. ∎

5.4.1 Proposition : L'adhérence dans la C^∞-topologie des $f \in SW^\infty(T^n)$ qui sont C^∞ conjugué à une translation est $SW^\infty(T^n)$.

Démonstration : Cela résulte immédiatement de 5.4.1 et du fait que l'ensemble $\alpha \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant une condition diophantienne est dense puisque de mesure de Lebesgue pleine. ∎

5.5 Remarque : Une application de 4.4 laisserait supposer que r_2 est pour presque $p(\alpha) \in \mathbb{R}^{n-1}$ de l'ordre de $\frac{n(n+1)}{2}$. Ce qui est bien supérieur à la perte de différentiabilité donné par VII.2 qui donne pour presque tout $p(\alpha)$ une perte de $n + \varepsilon$, il est vrai pour des f suffisamment proches de R_α !

5.6 Perte de différentiabilité

La proposition suivante montre qu'on a des exemples analogues pour T^n, $n \geq 2$ à ceux de T^1 que nous avons donné en XI.4.1. En fait ces exemples sont presque triviaux (ce qui n'est pas tout à fait le cas pour T^1). Ils donnent à une unité de moins la perte de différentiabilité escompté par VII.2.

5.6.1 Proposition : Si $n \geq 2$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^n$, tel que R_α soit T^n une translation ergodique, et pour tout $0 \leq r < +\infty$, il existe $f \in SW^r(T^n)$, $\rho_m(f) = \alpha$ avec f non C^{r-n+2} conjugué (si $r-n+2 \leq 0$ lire C^0) dans $D^{r-n+2}(T^n)$ à R_α; de plus, on peut choisir f, C^r proche de R_α.

Démonstration : Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \alpha + \varphi_1(x_2, \ldots, x_2), x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n)$; on a, si $0 \leq p \leq n-2$,

$$H'_{r-p}(f) = \sup_k \Big| \sum_{i=o}^{k} \varphi \circ R_{ip(\alpha)} \Big|_{C^{r-p}}$$

On choisit φ comme en 4.4 (i.e. $\varphi \notin \operatorname{Im} L^{r-p}_{p(\alpha)} \cap C^r_o(T^{n-1})$) et on conclut par la condition de 5.3 et la remarque qui suit. ∎

5.6.2 Proposition : Si $n \geq 2$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^n$, tel que $p(\alpha) \in \mathbb{R}^{n-1}$ soit de Liouville, il existe $f \in SW^\infty(T^n)$, avec $\rho_m(f) = \alpha$, fC^∞ proche de R_α et f non C^o- conjugué à R_α dans $D^o(T^n)$.

Démonstration : Utiliser l'invariant H'_o dans un exemple analogue a celui de 5.4.1 en utilisant 4.5. ∎

5.7 Minimalité

5.7.1 Soit $f \in SW^r(T^2)$ définie par $f(x_1,x_2) = (x_1 + \varphi(x_2), x_2 + \alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\varphi \in C^r_o(T^n)$ (i.e. $\int_{T^1} \varphi \, dm = 0$) . On suppose qu'il n'existe pas de $\psi \in C^o(T^1)$ vérifiant $\psi \circ R_\alpha - \psi = \varphi$. Soit $\bar{f} : T^2 \to T^2$ le difféomorphisme obtenu par passage au quotient.

5.7.2 Remarque : Pour tout α de Liouville, il existe $f \in SW^\infty(T^2)$ comme ci-dessus par 4.5.

5.7.3 Proposition : $\bar{f}$ est un difféomorphisme de T^2 minimal

Démonstration : Par la proposition 14.13 de Gottschalk et Hedlund [1], il existe un $x \in \mathbb{R}^2$, tel que $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que $\bar{f}$ ne soit pas minimal, alors il existe un ensemble minimal compact pour $\bar{f}$, $M \subset T^2$, $M \neq T^2$. Si $p : T^2 \to T^1$ est défini par $p(x_1,x_2) = x_2$ alors $p(M)$ est invariant par R_α, donc $p(M) = M$. Soit $\bar{x} = \pi(x) = (x_1,x_2) \in T^2$ ($\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ est la projection canonique).

Soit $y = (x_1,y_1) \in M$, tel que $p(x_1,x_2) = x_1$; comme $\bar{f}$ commute avec la translation $R_{(0,x_2 - y_1)}$, $M_1 = R_{(0,x_2 - y_1)}(M)$ est minimal, et $M_1 \neq T^2$; or $\bar{x} \in M_1$, et $\{\bar{f}^n(\bar{x}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans T^2 et donc par l'absurde, il en résulte que $\bar{f}$ est minimal. ∎

5.7.4 Remarque : Soit $f \in SW^{\infty}(T^2)$ comme dans 5.7.3. Alors $H'_o(f) = +\infty$, par 5.3, et par 4.7 $K_\infty(f) = 0$. Donc si G_f^∞ est l'adhérence de $\mathbb{Z}_f = \{f^n+p \mid p \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{Z}\}$ dans $SW^\infty(T^2)$ pour la C^∞-topologie. G_f^∞ a la puissance du continu par XII.3.2 et on a l'homomorphisme de groupes continu injectif

$$0 \to G_f^\infty \xrightarrow{\rho_2} \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \rho_2 = p \circ \rho_m .$$

$\rho_2(G_f^\infty)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}$ puisque $\rho_2(G_f^\infty)$ est contenu dans l'union des nombres de Liouville et des nombres rationnels. Ainsi, dans $D^o(T^n)$ $K_o(f) = 0$ n'implique nullement que f est C^o conjugué à une translation, contrairement au cas de T^1 (voir X.1.4).

6. ETUDE DU VOISINAGE $V_{R_\alpha}^{2\theta}$ DE VII.2

Nous allons montrer que le voisinage $V_{R_\alpha}^{2\theta}$ ne peut être remplacé par un voisinage dans la C^1-topologie si $n = 3$ ($n \geq 3$ marche évidemment). Il suffit de le montrer pour la proposition 2.6 qui est un corollaire de VII.2. On rappelle que $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, et que l'on a posé

$$D_\Omega^\omega(T^n) = \{f \in D^\omega(T^n) \mid f^* \Omega = \Omega\}$$

Proposition : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^3$ tel que R_α soit une translation ergodique sur T^3, il existe une suite $f_i \in D_\Omega^\omega(T^3)$, $f_i \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie telle que

1) $\rho_m(f_i) = \alpha$ pour tout i

2) Pour i assez grand f_i n'est pas C^o conjugué à R_α.

Démonstration : Nous allons construire une suite $(g_i) \in X_\Omega^\omega(T^n)$ de champs de vecteurs de divergence nulle convergent vers le champs de vecteurs constant $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ dans la C^1-topologie, avec

$$\rho_\Omega(g_i) = \int_{T^3} g_i = \alpha .$$

si $f_i(t) = \exp(tg_i)$ est le groupe à un paramètre engendré par g_i, on choisira g_i tel que pour tout i, il existe $x_i \in \mathbb{R}^n$ tel que

$\dfrac{f_i^n(x_i) - x_i}{n}$ ne converge pas vers α si $n \to +\infty$

(on a $f_i^n(x_1) - x_i = \frac{f_i(n,x_i) - x_i}{n}$, si $f_i(t,x)$ est le groupe $\exp(t,g_i)$), alors pour tout i, $f_i = \exp(g_i) \in D^\omega_\Omega(T^3)$

1) $\rho_m(f_i) = \alpha$ par 2.5

2) f_i converge vers R_α dans la C^1-topologie si $i \to +\infty$,

3) les f_i ne sont pas C^0- conjugué à R_α (par 1.5)

Construction des g_i

Soit $q = (q_1, q_2, q_3) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^3$ et $q' = (q'_1, q'_2, 0) \in (\mathbb{Z}-\{0\})^2 \times \{0\}$ et $p = (q, q'_1, q'_2) \in \mathbb{Z}^5$ et on pose $\sin 2\pi < qx> = \sin 2\pi(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3)$.

Soit g le champ de vecteur de T^3 de composantes

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{\beta(p)}{q_1} \sin 2\pi <q,x> + \frac{\beta(p)}{q'_1} \sin 2\pi <q',x> \\ \alpha_2 - 2\frac{\beta(p)}{q_2} \sin 2\pi <q,x> - \frac{\beta(p)}{q'_2} \sin 2\pi <q',x> \\ \alpha_3 + \frac{\beta(p)}{q_3} \sin 2\pi <q,x> \end{cases}$$

avec $\beta(p) \in \mathbb{R} - \{0\}$ choisi convenablement; alors

$$g \in X^\omega_\Omega(T^3) \quad \text{et} \quad \rho_\Omega(g) = \alpha .$$

Affirmation : L'inéquation

$$|<q,\alpha>| \leq |\beta(p)| \left|\frac{q_1}{q'_1} - \frac{q_2}{q'_2}\right|$$

$$|<q',\alpha>| \leq |\beta(p)| \left|\frac{q'_1}{q_1} - \frac{2q'_2}{q_2}\right|$$

a une infinité de solutions $p^i \subset \mathbb{Z}^5$ dont toutes les composantes sont non nulles, et telles que

$$|\beta(p^i)| \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty .$$

De plus si $i \to +\infty$ les rapports $\left|\frac{q_1}{q_2}\right|$, $\left|\frac{q_3}{q_1}\right|$, $\left|\frac{q'_1}{q'_2}\right|$ sont uniformément majorés par k, et minorés par $\frac{1}{k}$, indépendamment de i.

Fin de la construction des g_i

On choisit les p^i par l'affirmation. Soient q^i, $(q')^i$ avec $\beta(p_i)$. Alors si $i \to +\infty$, $g_i \to R_\alpha$ dans la C^1-topologie. Montrons que si $f_i = \exp(g_i)$ alors les f_i ne sont pas C^0 conjugués à R_α.

Soit $f_i(t,x)$ le groupe à un paramètre. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = g(f(t,x)) \text{ et } f(0,x) = x .$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle q,f\rangle(t,x) = \langle q,\alpha\rangle + \beta(p)\left(\frac{q_1}{q_1'} - \frac{q_2}{q_2'}\right)\sin 2\pi\langle q',f\rangle(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle q',f\rangle(t,x) = \langle q',\alpha\rangle + \beta(p')\left(\frac{q_1'}{q_2} - \frac{2q_2'}{q_1}\right)\sin 2\pi\langle q,f\rangle(t,x)$$

avec comme condition initiale :

$$\langle q,f\rangle(0,x) = \langle q,x\rangle$$

$$\langle q',f\rangle(0,x) = \langle q',x\rangle .$$

Par le choix de $\beta(p^i)$, il existe un $x_i \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\langle q^i,f_i(t,x_i)\rangle = \langle q^i,x_i\rangle = \text{Cte} ,$$

puisqu'il existe un x_i tel que

$$\frac{\partial \langle q^i,f_i\rangle}{\partial t}(t,x_i) = \frac{\partial}{\partial t}\langle (q^i)',f_i\rangle(t,x_i) = 0 .$$

On a alors

$$\left\langle q^i,\frac{f_i^n(x_i)}{n}\right\rangle \to 0 \qquad \text{si} \qquad n \to +\infty$$

$\frac{f_i^n(x_i)}{n}$ ne tend pas vers α car sinon $\langle q^i,\alpha\rangle = 0$ ce qui est contraire au fait que $(1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Comme c'est vrai pour tout i, il en résulte la proposition. ∎

Preuve de l'affirmation

Soient les deux formes linéaires, si $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$L_1(x) = x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

et

$$L_2(x) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \quad ,$$

(L_1,L_2) sont de rang 2.

D'après le théorème des formes linéaires de Minkowski (voir Cassels [1]) (ou autrement), il existe une infinité de solutions avec $x \in \mathbb{Z}^3 - \{0\}$ tel que

$$\sup |L_i(x)| \leq C|x|^{-1/2} \qquad (I)$$

si $|x| = \sup_i |x_i|$, C étant une constante ne dépendant que de L_1 et L_2.

Si

$$q = (x_1,-x_2,x_3), \; q' = (x_1,x_2) \; ,$$

et si on choisit une suite de solutions de (I) telle que $|x^i| \to +\infty$ si $i \to +\infty$, on a alors pour i assez grand (le signe $\sim$ veut dire approximativement)

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \sim 0 \quad \text{soit} \quad \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = \left|\frac{q_1'}{q_2'}\right| \sim \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|$$

et $2\alpha_1x_1 + \alpha_3x_3 \sim 0$, soit

$$\left|\frac{2x_1}{x_3}\right| = \left|\frac{2q_1}{q_3}\right| \sim \left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right| .$$

De plus,

$$\langle\alpha,q\rangle = L_1(x) \, ,$$

$$\langle\alpha,q'\rangle = L_2(x) \, ,$$

$\left|\frac{q_1}{q_2'} - \frac{q_2}{q_2'}\right| = 2$ et $\left|\frac{q_1'}{q_1} - \frac{2q_1'}{q_2}\right| = 3$. Il suffit alors de choisir

$$|\beta(p^i)| = \frac{c}{2}|x^i|^{-1/2}$$

On a bien si $i \to +\infty$, $|\beta(p^i))| \to 0$, et par les choix q', $(q')^i$ satisfait les conditions de l'affirmation. ∎

7. QUELQUES PROPRIETES GENERIQUES DANS $\bar{O}^\infty(\Omega)$

7.1 Soit la forme différentielle $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ et $D^\infty_\Omega(T^n)$ défini en 2.3 qui est un sous groupe fermé de $D^r(T^n)$.
Soient $O^\infty_\alpha(\Omega) = \{g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \mid g \in D^\infty_\Omega(T^n)\}$, $O^\infty(\Omega) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}^n} O^\infty_\alpha(\Omega)$ et finalement $\overline{O^\infty}(\Omega)$ l'adhérence de $O^\infty(\Omega)$ dans $D^\infty_\Omega(T^n)$ pour la C^∞-topologie.

7.2 Proposition : Si $n \geq 2$, il est générique (pour la C^∞-topologie) dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ de ne pas être C^0-conjugué à une translation dans $D^0(T^n)$.

Démonstration : Soit H'_o l'invariant défini en 3.4. $G = H'^{-1}_o(+\infty) \cap \bar{O}^\infty(\Omega)$ est un G_δ dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ par la semi-continuité inférieure de H'_o.
(Remarquons par 1.5 si f est C^0-conjugué à R_α dans $D^0(T^n)$ alors $H'_o(f) < +\infty$).
Il nous reste donc à montrer que G est dense dans $O^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie et la proposition sera démontrée. Soit L l'union des $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $p(\alpha) = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ soit de Liouville dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Evidemment $\bigcup_{\alpha \in L} O^\infty(\Omega)$ est dense dans $O^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. Or pour tout $\alpha \in L$, il existe une suite (f_i) d'éléments de $SW^\infty(T^n)$ telleque si $f_i \to R_\alpha$ dans la C^∞-topologie et pour tout i, $H'_o(f_i) = +\infty$ (voir 5.6.2).
D'après 5.4.1, $SW^\infty(T^n) \subset \bar{O}^\infty(\Omega)$; par conjugaison C^∞, on conclut que pour tout $f \in \bigcup_{\alpha \in L} O^\infty(\Omega)$, il existe une suite (f_i), avec $f_i \in \bar{O}^\infty(\Omega)$, telle que pour tout i $H'_o(f_i) = +\infty$ et si $i \to +\infty$, $f_i \to f$. On en déduit bien que G est un G_δ dense dans $\overline{O^\infty}(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. ∎

7.3 Remarque : Il n'est pas difficile de voir qu'il est générique dans $\overline{O^\infty}(\Omega)$ pour la C^∞-topologie que f soit tel que $R_{\rho m(f)}$ soit sur T^n une translation ergodique.

7.4 Proposition : Si $n \geq 2$, il est générique dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ que $\bar{f}$ soit sur T^n strictement ergodique avec pour unique mesure de probabilité invariante la mesure de Haar de T^n, m.

Remarque : On voit facilement que $\bar{f} : T^n \to T^n$ est un homéomorphisme strictement ergodique alors $\bar{f}$ est minimal (puisque par le théorème de Markov-Kakutani, pour tout ensemble fermé invariant F, il existe une mesure de probabilité invariante par f de support dans F).

Démonstration : Soit (φ_1) une suite dénombrable dense dans $C^o_o(T^n)$. Soit

$$\bar{f} \to E_i(\bar{f}) = \operatorname*{Inf}_{k \geq 1} \left| \frac{\sum_{i=o}^{k-1} \varphi \circ \bar{f}^i}{k} \right|_o \in \mathbb{R}_+$$

Pour tout i, E_i est semi-continue inférieurement et donc $E_i^{-1}(0)$ est un G_δ ; et

$$G_i = E_i^{-1}(0) \cap \bar{O}^\infty(\Omega)$$

également; $G = \bigcap_i G_i$ est donc aussi un G_δ . Si pour tout i, $E_i(\bar{f}) = 0$ alors on voit facilement que toute mesure de probabilité de T^n invariante par $\bar{f}$ est nulle sur $C^o_o(T^n)$, et donc coïncide avec la mesure de Haar de T^n. Pour montrer 7.4, il suffit de montrer que G est dense dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$. Or si $f \in \bigcup_{\alpha \in TE} O^\infty_\alpha(\Omega) = O^\infty_I(\Omega)$ TE désignant l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^n$ telles que R_α soit une translation ergodique, alors f est alors strictement ergodique par conjugaison.

Or $O^\infty_I(\Omega)$ est dense dans $O^\infty(\Omega)$ et donc G est un G_δ dense dans $O^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie. ∎

7.5 En XII.3.1, nous avons défini, $K_\infty : D^\infty(T^n) \to \mathbb{R}_+$, semi-continue inférieurement, telle que si $K_\infty(f) = 0$ alors l'adhérence de $\mathbb{Z}_f = \{ f^n + p \mid n \in \mathbb{Z} \quad p \in \mathbb{Z} \}$ dans la C^∞-topologie dans $D^r(T^n)$ soit un groupe abélien à la puissance du continu (voir II.2.12).

Proposition : $K_\infty^{-1}(0) \cap \bar{O}^\infty(\Omega)$ est un G_δ dense dans $\bar{O}^\infty(\Omega)$ pour la C^∞-topologie.

Démonstration : Exercice .

7.2, 7.4, 7.5 montrent que la situation sur T^n, $n \geq 2$ est radicalement différente avec le cas $n = 1$. La C^0-conjugaison à une translation n'est ni impliquée par la minimalité de f (7.4) ni par le $K_\infty(f) = 0$; on peut dire qu'il faut contrôler toute l'équation linéarisée, mais il resterait à trouver des invariants que l'on puisse calculer positivement.

C H A P I T R E X I V

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES DU TORE

Cet article est paru dans les Annales de l'Institut Fourier
de l'Université de Grenoble, tome XXIII, fasc. 2 (1973)

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 75-86.

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES DU TORE

par Michael R. HERMAN

Soit $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ le tore de dimension n.

Si M est une variété lisse compacte, connexe, $\mathrm{Diff}^k(M)$ (k entier, $1 \leqslant k \leqslant +\infty$) est le groupe des difféomorphismes de classe C^k de M; pour la C^k topologie, c'est un groupe topologique; $\mathrm{Diff}^k_+(M)$ est le sous-groupe distingué composante connexe de l'élément neutre 1_M. Comme $\mathrm{Diff}^k(M)$ est localement connexe par arcs (voir [2]), $\mathrm{Diff}^k_+(M)$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^k, qui sont C^k isotopes à l'identité.

Si G est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty_+(M)$, $W^\infty(G)$ désigne le plus petit sous-groupe distingué engendré par G dans $\mathrm{Diff}^\infty_+(M)$.

Si G est un groupe, on a les définitions suivantes.

Définition 1. — G *est un groupe parfait si* $G = [G, G]$ [1].

Définition 2. — *Si* G *est un groupe (resp. un groupe topologique),* G *est dit simple (resp. topologiquement simple) si* G *n'a pas d'autre sous-groupe distingué (resp. de sous-groupe distingué fermé) que l'élément neutre* $\{e\}$, *et* G *lui-même.*

On remarque que l'on a l'inclusion canonique

$$T^n \hookrightarrow \mathrm{Diff}^k_+(T^n)$$

qui à chaque $\alpha \in T^n$ associe la translation

$$R_\alpha : x \in T^n \to T^n \ni x + \alpha.$$

[1] [G, G] est le sous-groupe des commutateurs de G.

Par la suite, on identifie T^n à son image dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$. On a le théorème suivant (annoncé aussi par J. Mather [7]).

THÉORÈME. — *$Diff_+^\infty(T^n)$ est un groupe parfait* (2).

Pour démontrer ce théorème, on cherche le « plus possible » à conjuguer des éléments de $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$ à des éléments de T^n; pour des raisons élucidées par V. I. Arnold [1], nous introduisons une condition diophantienne.

DÉFINITION 3. — *$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{R}^n$ satisfait à une condition diophantienne, s'il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $(k_0, k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}^n - \{0\})$, on ait :*

$$\left| k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \right| \geqslant \frac{c}{\left(\sum_{i=1}^{n} |k_i| \right)^\alpha}.$$

Remarque. — On a nécessairement $\alpha \geqslant n$ d'après le principe des tiroirs de Dirichlet. Voir S. Lang et les références citées dans [6], § 6.

DÉFINITION 4. — *$\gamma \in T^n$ satisfait à une condition diophantienne si un relèvement $\tilde{\gamma} \in \mathbf{R}^n$ de γ satisfait à une condition diophantienne (cela ne dépend pas du relèvement).*

Introduisons quelques notations :

— si $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, on pose $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i|$;

— si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in T^n$, on pose

$$\langle k, \gamma \rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \in T^1;$$

— d désigne la métrique sur T^1, quotient de la métrique standard sur $\mathbf{R}$;

— si $\delta \in T^1$ et si 0 est l'élément neutre de T^1, on pose $\|\delta\| = d(0, \delta) \in \mathbf{R}^+$. La définition 4 est équivalente à la définition suivante.

DÉFINITION 4'. — *$\gamma \in T^n$ satisfait à une condition diophantienne s'il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout*

(2) J'ai démontré que la composante connexe pour la C^∞ topologie du groupe des difféomorphismes R-analytiques de T^n est un groupe parfait (à paraître).

$k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, *on ait* :

$$\|\langle k, \gamma\rangle\| \geqslant \frac{c}{|k|^\alpha}.$$

On a la proposition de Kintchine, voir [6].

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des* $\gamma \in \mathrm{T}^n$ *qui satisfont à une condition diophantienne pour* $\alpha = n + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ *est de mesure de Haar* 1.

Remarque. — On peut expliciter des $\gamma \in \mathbf{R}^n$ qui satisfont à une condition diophantienne.

Si $a \in \mathbf{R}$ est un nombre algébrique de degré d, avec $d \geqslant n + 1$, vérifiant pour i entier $\sum_{i=1}^{n} |a^i| < 1$, alors $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, avec $\gamma_i = a^i$ $1 \leqslant i \leqslant n$ satisfait à une condition diophantienne avec $\alpha = d - 1$ et $c > 0$. Il suffit d'appliquer le théorème 3, chapitre I, § 3 de [11].

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME FONDAMENTAL [5], [9]. — *Soit* $\mathrm{R}_\gamma \in \mathrm{T}^n$ *une translation satisfaisant à une condition diophantienne pour un* $\alpha > 0$, *et un* $c > 0$.

Soit Φ_γ *l'application continue (c'est même un* $\mathscr{L}$*-morphisme de classe* C^∞ :

$$\Phi_\gamma : \mathrm{Diff}^\infty_+(\mathrm{T}^n) \times \mathrm{T}^n \to \mathrm{Diff}^\infty_+(\mathrm{T}^n)$$
$$(\psi, \lambda) \to \mathrm{R}_\lambda \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi.$$

Alors, il existe un voisinage V *de* R_γ *dans* $Diff^\infty_+(\mathrm{T}^n)$ *pour la* C^∞ *topologie et une application continue (c'est même un* $\mathscr{L}$*-morphisme faible) :*

$$s : \mathrm{V} \to Diff^\infty_+(\mathrm{T}^n) \times \mathrm{T}^n$$

telle que si 1_V *est l'identité de V.*

$$\Phi_\gamma \circ s = 1_\mathrm{V}$$

Le lemme fondamental est un corollaire du théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert, mais nous aurions besoin de nombreux préliminaires et nous n'en donnerons qu'une esquisse. Pour les définitions de $\mathscr{L}$-morphisme, $\mathscr{L}$-groupe, et l'énoncé du théorème des fonctions implicites, voir le résumé dans ce volume par F. Sergeraert ainsi que [9].

On peut aussi montrer une version légèrement différente de ce lemme en utilisant J. Moser [8], à savoir que l'image de Φ_γ (resp. l'image par Φ_γ des difféomorphismes **R**-analytiques) contient un voisinage de R_γ dans la C^∞ topologie, (resp. un voisinage de R_γ dans les difféomorphismes **R**-analytiques pour la C^∞ topologie).

Esquisse de la démonstration du lemme fondamental.

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert, on remarque que Φ_γ est un $\mathscr{L}$-morphisme (comme composé de $\mathscr{L}$-morphismes) de classe C^∞; entre les $\mathscr{L}$-groupes de classe C^∞ $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) \times T^n$ et $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$, voir [9] et [10].

On cherche à montrer que la différentielle $T\Phi_\gamma$ de Φ_γ a une $\mathscr{L}$-section au voisinage de $(1_{T^n}, 0)$, $(\Phi_\gamma(1_{T^n}, 0) = R_\gamma)$; pour cela,

a) on exprime Φ_γ dans une carte,

b) on calcule la différentielle de Φ_γ dans la carte,

c) on réduit l'inversion de $T\Phi_\gamma$ à une équation fonctionnelle que l'on résoud en *d*).

a) Expression de Φ_γ dans des cartes.

1) *Cartes de $Diff^\infty_+(M)$ pour M variété compacte lisse.*

Soit $C^\infty(M, M)$ l'espace des applications de classe C^∞ de M dans M. On munit M d'une métrique riemanienne *m* (nécessairement complète) de classe C^∞.

m définit une application exponentielle $\exp : T(M) \to M$ si $\xi \in T_p(M)$, alors $\exp(t\xi)$ est la géodésique telle que $\exp(t\xi)|_{t=0} = p$, et $\frac{d}{dt}(\exp(t\xi)|_{t=0} = \xi$.

Soit $\mathrm{Exp} : T(M) \to M \times M$ l'application définie par $\mathrm{Exp} = \pi \times \exp$ où π est la projection canonique $\pi : T(M) \to M$.

On sait que Exp est un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage V de la section nulle de T(M) sur un voisinage W de la diagonale de $M \times M$.

Si $\xi \in V$, on note : $\exp(\xi) = \pi(\xi) + \xi \in M$ et si $(x, y) \in W$, on écrit : $\mathrm{Exp}^{-1}(x, y) = y - x \in \pi^{-1}(x)$.

Soit $f \in C^\infty(M, M)$ et $f^*(T(M))$ le fibré image-réciproque du fibré tangent de M. On sait que les sections de classe C^∞ du fibré $f^*(T(M)$ s'identifient aux applications I C^∞ $\gamma : M \to T(M)$ telles que $\pi \circ \gamma = f$ (i.e. les sections de T(M) au-dessus de f). On note cet espace $\Gamma_f^\infty(M)$.

Soient.

a) W_f l'ensemble des $g \in C^\infty(M, M)$ telles que pour tout x de M, $(f(x), g(x)) \in W$ (i.e. un voisinage de f dans $C^\infty(M, M)$) ;

b) V_f l'ensemble des $\gamma \in \Gamma_f^\infty(M)$ telles que pour tout x de M, $\gamma(x) \in V$. Alors, on a l'homéomorphisme suivant : $\psi_f : V_f \to W_f$ défini par

$$\text{i)} \qquad \psi_f(\gamma)(x) = f(x) + \gamma(x) \quad (\text{si } \gamma \in V_f);$$
$$\text{ii)} \qquad \psi_f^{-1}(g)(x) = g(x) - f(x) \quad (\text{si } g \in W_f).$$

ψ_f définit une carte au voisinage de $f \in C^\infty(M, M)$; on montre (voir [9]) que les changements de cartes sont des $\mathscr{L}$-morphismes de classe C^∞, et que l'espace tangent en $f \in C^\infty(M, M)$ est $\Gamma_f^\infty(M)$.

$\mathrm{Diff}_+^\infty(M)$ qui est un ouvert de $C^\infty(M, M)$ est donc une $\mathscr{L}$-variété de classe C^∞ ; de plus (voir [9]), on montre que c'est un $\mathscr{L}$-groupe de classe C^∞ (3).

2) *Cas de* $Diff_+^\infty(T^n)$.

On munit $\mathbf{R}^n$ de la structure euclidienne canonique : si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. On munit T^n de la métrique riemanienne quotient. Le fibré tangent $T(T^n)$ est canoniquement isomorphe à $T^n \times \mathbf{R}^n$, et l'on peut identifier $\Gamma_f^\infty(T^n)$ aux applications de classe C^∞ $\eta : T^n \to T^n \times \mathbf{R}^n$ telles que $\eta(x) = (f(x), \xi(x)) \in T^n \times \mathbf{R}^n$; $\Gamma_f^\infty(T^n)$ est donc isomorphe à $C^\infty(T^n, \mathbf{R}^n)$. On note $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = T^n$, la projection canonique.

Si $\tilde{f}$ est un revêtement du difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$,

(3) Dans le cadre des groupes de difféomorphismes H^s, avec des inégalités analogues à ceux des $\mathscr{L}$-morphismes voir D. G. Ebin, Espaces des métriques riemaniennes et mouvement des fluides via les variétés d'applications, cours ronéotypé, Centre de Math. de l'E.P., 17, rue Descartes, Paris V.

et si V est un voisinage assez petit de

$$0 \in \Gamma^\infty_f(T^n) \cong C^\infty(T^n, \mathbf{R}^n)$$

dans la C^1 topologie, à $\xi \in V$, on associe le difféomorphisme $\tilde{f} + \xi \circ p$ de $\mathbf{R}^n$ qui par passage au quotient définit un difféomorphisme $\overline{\tilde{f} + \xi \circ p} \in \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$.

On a défini ainsi une application (elle ne dépend pas du relèvement $\tilde{f}$) qui est un homéomorphisme sur son image

$$\psi_f : \quad \Gamma^\infty_f(T^n) \supset V \to W_f \subset \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$$

et l'on vérifie, en utilisant le fait que les géodésiques de T^n pour la métrique choisie sont les quotients des droites de $\mathbf{R}^n$, que ψ_f n'est rien d'autre que l'application définie en 1) et que les notations i) et ii) sont cohérentes quand on les interprète dans le revêtement universel $\mathbf{R}^n$ de T^n.

3) *Expression de* Φ_γ.

On regarde Φ_γ dans des cartes des $\mathscr{L}$-groupes $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) \times T^n$ et $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ au voisinage respectivement de $(1_{T^n} \times 0)$ et R_γ.

On peut prendre par exemple les espaces tangents $\Gamma^\infty(T^n) \times \mathbf{R}^n$ et $\Gamma^\infty_{R_\gamma}(T^n)$ où $\Gamma^\infty(T^n)$ désigne les champs de vecteurs de classe C^∞ sur T^n (au-dessus de l'identité de T^n).

Si r est un entier, $r \geqslant 1$, $\Gamma^r(T^n)$ (resp. $\Gamma^r_{R_\gamma}(T^n)$) désignent les espaces de Banach complétés de $\Gamma^\infty(T^n)$ (resp. $\Gamma^\infty_{R_\gamma}(T^n)$) pour la norme $|\ |_r$ définissant la C^r topologie; $\Gamma^r(T^n)$ est l'espace tangent en l'identité de $\mathrm{Diff}^r_+(T^n)$.

On peut alors écrire le prolongement de Φ_γ aux complétés (pour tout entier $k \leqslant r$) :

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : \quad & \Gamma^r(T^n) \times \mathbf{R}^n \to \Gamma^{r-k}_{R_\gamma}(T^n) \\ (\xi, \lambda) & \longmapsto (1 + \xi)^{-1} \circ R_\gamma \circ (1 + \xi) + \lambda - \gamma \end{aligned}$$

ξ étant petit dans la C^1-topologie.

On pose $(1 + \xi)^{-1} = 1 + \mu$.

Φ^r_γ est alors de classe C^k [4] (cf. J. Dieudonné [3] VIII 12 problème 9) et l'on montre que Φ_γ est un $\mathscr{L}$-morphisme de classe C^∞ [9], [10].

[4] Dans la littérature, c'est aussi appelé le α et Ω lemmes.

b) Application différentielle de Φ_γ $(k \geqslant 1)$.

L'application différentielle appliquée à

$$(\hat{\xi}, \hat{\lambda}) \in \Gamma^r(T^n) \times \mathbf{R}^n$$

est donnée par :

$$T\Phi^r_\gamma(\xi, \lambda) \cdot (\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = T(1+\mu)_{\circ R\gamma \circ (1+\xi)} \cdot \hat{\xi} - T(1+\mu)_{\circ R\gamma \circ (1+\xi)} \cdot \hat{\xi} \circ (1+\mu) \circ R_\gamma \circ (1+\xi) + \hat{\lambda}$$

où $T(1+\mu)$ est la différentielle de $(1+\xi)^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et $(T(1+\mu)_{\circ R\gamma \circ (1+\xi)} \cdot \hat{\xi})(x)$ est la différentielle de $(1+\xi)^{-1}$ au point $R_\gamma \circ (1+\xi)(x)$ appliquée au vecteur $\hat{\xi}(x)$ et

$$(T(1+\mu)_{\circ R\gamma \circ (1+\xi)} \cdot \xi \circ (1+\mu) \circ R_\gamma \circ (1+\xi)\ (x)$$

est la différentielle de $(1+\xi)^{-1}$ au point $R_\gamma \circ (1+\xi)\ (x)$ appliquée au vecteur $\xi((1+\mu) \circ R_\gamma \circ (1+\xi)(x))$.

En particulier :

$$d\Phi^r_\gamma(0, 0) \cdot (\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = \hat{\xi} - \hat{\xi} \circ R_\gamma + \hat{\lambda}.$$

c) Inversion de la différentielle de Φ_γ.

On cherche si la différentielle $T\Phi_\gamma(\xi, \lambda)$ a une $\mathscr{L}$-section au voisinage de $(0, 0)$.

On a donc à résoudre $T\Phi^r_\gamma(\xi, \lambda) \cdot (\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = \eta$ où ξ, λ, η sont donnés, et $\hat{\xi}$, $\hat{\lambda}$ inconnus.

Pour ce faire, on compose à droite avec $(1+\xi)^{-1} = 1 + \mu$, puis on applique à gauche $T(1+\xi) \circ (1+\mu) \circ R_\gamma$ et l'on pose

$$\tilde{\xi} = \xi \circ (1+\mu) \tag{1}$$

Il vient

$$\tilde{\xi} - \tilde{\xi} \circ R_\gamma = T(1+\xi)_{\circ (1+\mu) \circ R\gamma} \cdot \eta \circ (1+\mu) - T(1+\xi)_{\circ (1+\mu) \circ R\gamma} \cdot \hat{\lambda}.$$

On pose

$$\tilde{\eta} = T(1+\xi)_{\circ (1+\mu) \circ R\gamma} \cdot \eta \circ (1+\mu) \tag{2}$$

et

$$\chi(\xi) = T(1+\xi)_{\circ (1+\mu) \circ R\gamma} \tag{3}$$

On a à résoudre :

$$\tilde{\xi} - \tilde{\xi} \circ R_\gamma = \tilde{\eta} - \chi(\xi) \cdot \hat{\lambda}.$$

On est ramené à résoudre l'équation fonctionnelle suivante :

si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{T}^n$,

$$\tilde{\xi}(x) - \tilde{\xi}(x + \gamma) = \tilde{\eta}(x) - \chi(\xi)(x) \cdot \hat{\lambda} \qquad (+)$$

d) Résolution de l'équation fonctionnelle.

On remarque que si $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$ désigne la mesure de Haar sur T^n, alors :

$$\int_{\mathrm{T}^n} (\tilde{\xi}(x) - \tilde{\xi}(x + \gamma))\, dx = 0$$

Ce qui nous permet de déterminer $\hat{\lambda}$.

Si ξ est assez petit (dans la C^1 topologie), alors $\mathrm{M} = \int_{\mathrm{T}^n} \chi(\xi)(x)\, dx$ est une matrice proche de l'identité et donc inversible, et il suit nécessairement :

$$\hat{\lambda} = \mathrm{M}^{-1} \int_{\mathrm{T}^n} \tilde{\eta}(x)\, dx \qquad (4)$$

On a ainsi déterminé $\hat{\lambda}$.

Pour calculer $\tilde{\xi}$, on cherche son développement de Fourier :

$$\tilde{\xi}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} a_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle}$$

connaissant celui de

$$\tilde{\eta}(x) - \chi(\xi)(x) \cdot \lambda = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} b_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle}$$

avec $a_k \in \mathbf{C}^n$, $b_k \in \mathbf{C}^n$, $b_{-k} = \overline{b}_k$, $a_{-k} = \overline{a}_k$.

On a posé $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\langle k, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$, le choix de $\hat{\lambda}$ donne $b_0 = 0$.

L'identification des coefficients de Fourier des deux membres de $(+)$ donne alors :

$$a_k = \frac{b_k}{1 - e^{2i\pi \langle k, \gamma \rangle}}, \qquad k \neq 0 \quad \text{et} \quad a_0 = 0.$$

On pose $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i|$; et $|a_k|$ est la norme hermitienne (standard) de $a_k \in \mathbf{C}^n$. La condition diophantienne sur γ donne une majoration $|a_k| \leqslant \mathrm{C}|b_k||k|^{\alpha}$ avec C une constante dépendant seulement de γ.

On déduit l'existence d'une constante β (dépendant de γ et de n) telle que si $\Sigma b_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$ est de classe C^r, alors $\Sigma a_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$ est de classe $C^{r-\beta}$.

L'existence de β résulte du cas **R**-analytique et par approximation des fonctions de C^r par les **R**-analytiques (voir J. Moser [8]). On peut aussi raisonner ainsi :

Soit $L^2(T^n, dx, \mathbf{R}^n)$ l'espace des applications de T^n dans $\mathbf{R}^n$ de carré intégrable pour la mesure de Haar dx sur T^n. Si $f \in L^2(T^n, dx, \mathbf{R}^n)$ on désigne par $a_k(f)$, $k \in \mathbf{Z}^n$ les coefficients de Fourier de f. Pour r entier, $r \geqslant 0$ (par exemple) on pose

$$H^r(T^n, \mathbf{R}^n) = \{f \in L^2(T^n, dx, \mathbf{R}^n) \Big| \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} (1 + |k|^2)^r |a_k(f)|^2 < +\infty\}$$

Soit $C^r_0(T^n, \mathbf{R}^n)$ (resp $H^r_0(T^n, \mathbf{R}^n)$) l'espace des $f \in C^r(T^n, \mathbf{R}^n)$ (resp. $f \in H^r(T^n, \mathbf{R}^n)$) vérifiant $a_0(f) = \int_{T^n} f(x)\,dx = 0$.

On a (par récurrence par exemple) $C^r(T^n, \mathbf{R}^n) \subset H^r(T^n, \mathbf{R}^n)$.

On voit facilement que la majoration $|a_k| \leqslant C|b_k||k|^\alpha$ (α entier) implique si $r \geqslant \alpha$, on a :

$$L : H^r_0(T^n, \mathbf{R}^n) \to H^{r-\alpha}(T^n, \mathbf{R}^n)$$

$$(b_k(f), k \in \mathbf{Z}^n) \to (a_k(L(f)) = \frac{b_k}{1 - e^{2i\pi\langle k,\gamma\rangle}} \text{ si } k \neq 0 \text{ et } a_0 = 0)$$

et par le théorème de Sobolev

$$L : C^r_0(T^n, \mathbf{R}^n) \to C^{r-\beta}(T^n, \mathbf{R}^n) \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha + \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Autrement dit, l'application linéaire

$$L : \Sigma b_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle} \to \Sigma a_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

est un 1-$\mathscr{L}$ morphisme (i.e. pour tout $r > \beta$

$$L : C^r_0(T^n, \mathbf{R}^n) \to C^{r-\beta}(T^n, \mathbf{R}^n)$$

est linéaire continue).

On détermine $\tilde{\xi}$ et donc par (1) :

$$\hat{\xi} = \tilde{\xi} \circ (1 + \xi) \tag{5}$$

L'application $(\xi, \lambda, \eta) \to (\hat{\xi}, \hat{\lambda})$ étant une composée de $\mathscr{L}$-morphismes (voir les expressions (1), (2), (3), (4), (5) et [9], [10])) est un $\mathscr{L}$-morphisme qui est une $\mathscr{L}$-section de

$T\Phi_\gamma(\xi, \lambda)$ au voisinage de $(0, 0)$ et l'on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert, voir [9] et [10].

Il existe un voisinage de V de R_γ dans $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ pour la C^∞ topologie et une application continue

$$s : V \to \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) \times T^n$$

telles que $\Phi_\gamma \circ s = 1_V$.

Ce qui termine l'esquisse de la démonstration du lemme fondamental.

Corollaire du lemme fondamental. — *Le plus petit sous-groupe distingué engendré par* T^n *dans* $Diff^\infty_+(T^n)$ *est* $Diff^\infty_+(T^n)$.

Démonstration. — $W^\infty(T^n)$ est d'après le lemme fondamental un sous-groupe ouvert au voisinage d'une translation R_γ satisfaisant à une condition diophantienne (il en existe); $W^\infty(T^n)$ est donc un sous-groupe ouvert et donc un sous-groupe fermé, et l'on a bien $W^\infty(T^n) = \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ car $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est un groupe topologique connexe.

Démonstration du théorème. — Soit $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$

et $$S^1 = \partial\overline{\Delta} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

On a l'isomorphisme suivant :

$$\varphi : T^1 \to S^1$$
$$t \to e^{2\pi i t}$$

Soit H_1 le groupe des applications biholomorphes de Δ.

Par le lemme de Schwarz, on voit facilement que $g \in H_1$ si et seulement s'il est de la forme :

$$z \in \Delta \to g(z) = \frac{\alpha(z - a)}{1 - \bar{a}z} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \partial\overline{\Delta} \text{ et } a \in \Delta \quad \text{(I)}$$

H_1 est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ car g se prolonge uniquement à un difféomorphisme de $\partial\overline{\Delta} = S^1$ (voir la formule I); et donc par l'isomorphisme φ de T^1 sur S^1, H_1 est isomorphe à un sous-groupe H de $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^1)$.

Si l'on fait $a = 0$ dans (I), on a, une fois sur T^1 :

$$T^1 \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\infty_+(T^1).$$

H est aussi isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\{-1, +1\}$, d'où il résulte que $H = [H, H]$. On a, si H^n est le produit de n exemplaires de H :

$$T^n \subset H^n \subset \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n).$$

Mais, on a :

$$H^n = [H^n, H^n] \subset [\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n), \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)]$$

et donc d'après le corollaire du lemme fondamental, on a les inclusions :

$$\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) = W^\infty(H^n) \subset [\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n), \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)]$$

d'où il résulte que $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est un groupe parfait.

Corollaire 1. — *$[Diff^k_+(T^n), Diff^k_+(T^n)]$, si k est un entier, $k \geqslant 1$, est un sous-groupe partout dense dans $Diff^k_+(T^n)$ pour la C^k topologie.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que le groupe $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) \hookrightarrow [\mathrm{Diff}^k_+(T^n), \mathrm{Diff}^k_+(T^n)]$ est dense dans $\mathrm{Diff}^k_+(T^n)$ par la C^k topologie par approximation.

Corollaire 2. — *$Diff^k_+(T^n)$ est un groupe topologiquement simple si $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ pour la C^k topologie et simple si $k = +\infty$.*

Démonstration. — Ce corollaire résulte d'une proposition d'Epstein [4] qui affirme que tout sous-groupe distingué différent de $\{1_M\}$ du groupe $\mathrm{Diff}^k_+(M)$, où M est une variété compacte connexe, contient le groupe des commutateurs $[\mathrm{Diff}^k_+(M), \mathrm{Diff}^k_+(M)]$ et le corollaire 2 résulte du corollaire 1.

Corollaire 3. — *Les difféomorphismes de T^n de classe C^∞ qui sont sur un groupe à un paramètre de classe C^∞ engendrent $Diff^\infty_+(T^n)$.*

Démonstration. — Chaque translation $R_\alpha \in T^n \subset \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est sur un groupe à un paramètre de classe C^∞. On remarque que si $g \in \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est sur un groupe à un paramètre de

classe C^∞, alors pour tout $\psi \in \mathrm{Diff}^\infty(T^n)$, le conjugué $\psi^{-1} \circ g \circ \psi$ est aussi sur un groupe à un paramètre de classe C^∞. Le corollaire 3 résulte du corollaire du lemme fondamental (il résulte aussi du corollaire 2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnold, Small denominators I, Trans. A.M.S. 2e série, v. 46, p. 213-284.

[2] J. Cerf, *Bull. soc. Math.* Fr., 89, 1961, p. 227-380.

[3] J. Dieudonné, Fondements de l'analyse moderne, t. I, Gauthier-Villars, Paris 1967.

[4] D. B. A. Epstein, « Diff (M) is simple? » Symposium on differential equations and Dynamical systems, lecture notes nº 206, Springer-Verlag, 1971, p. 52-54, voir aussi du même auteur. The simplicity of certain groups of Homeomorphisms, composito Mathematica, vol. 22, fasc. 2, 1970, p. 165-173.

[5] M. Herman et F. Sergeraert, Sur un théorème d'Arnold et Kolmogorov, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, p. 409-411.

[6] S. Lang, Transcendental numbers and diophantine approximations, B.A.M.S., volume 77, Sep. 1971, p. 635-677.

[7] J. Mather, On Heafliger's classifying Space I, B.A.M.S., nov. 1971, p. 1111-1115.

[8] J. Moser, *Ann. Scuola. Norm. Sup. di Pisa*, 20, 1966, p.499-535.

[9] F. Sergeraert, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, *Ann. Scient. Éc. Nor. Sup.*, 4e série, t. 5, 1972, p. 599-660.

[10] F. Sergeraert, Annonce dans ce volume.

[11] T. Schneider, « Introduction aux nombres transcendants ». Traduction Gauthier-Villars, 1959.

Michaël R. Herman,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes, Paris 5e.

C H A P I T R E X V

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES R-ANALYTIQUES DU TORE

Cet article est paru dans Lecture Notes in Mathematics No 484,
Springer (1975)

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES R-ANALYTIQUES DU TORE

M.R. Herman, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique - Paris.

On annonce que le groupe des difféomorphismes $\mathbb{R}$-analytiques qui sont C^1 isotopes à l'Id, du tore de dimension n, est un groupe simple.

Le résultat qui va suivre est relié à [2] par suspension, mais nous utilisons la structure du groupe T^n dans $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$ et il ne semble pas facile de déduire le théorème de [2] .

1.1. On utilisera indifféremment les notations "$\mathbb{R}$-analytique" et " de classe C^{ω} ".
Soit M une variété de classe C^{ω} , compacte, connexe, de dimension finie; M admet un plongement de classe C^{ω} dans $\mathbb{R}^n$ (n grand) d'après GRAUERT. $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(M)$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^{ω}, qui sont C^k-isotopes ($1 \leq k \leq \omega$) à Id_M ; c'est aussi (par approximations relatives) la composante connexe par arcs de Id_M , du groupe des difféomorphismes de classe C^{ω} de M avec la C^k topologie ($1 \leq k \leq \omega$). On définit de façon analogue $\mathrm{Diff}^{k}_{+}(M)$ pour $1 \leq k \leq +\infty$, voir [1] *.

Proposition 1 : Pour toute variété M compacte connexe de classe C^{ω}, le groupe $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(M)$ est un groupe topologiquement simple pour la C^{∞} topologie.

La proposition résulte de ce que $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(M)$ est dense dans $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(M)$ pour la C^{∞} topologie et que le groupe $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(M)$ est simple d'après THURSTON [7] (pour la simplicité du groupe $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(T^n)$, voir [1]).

1.2. Soit le tore de dimension n,

$$T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

on a l'inclusion canonique $T^n \hookrightarrow \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$.

$$\lambda \to R_\lambda \ : \ x \in T^n \to x+\lambda \in T^n$$

Nous allons démontrer le

---

* Nous attirons l'attention du lecteur de [1] sur le fait que dans l'esquisse de la démonstration du lemme fondamental à la p. 81, §C; il faut partout remplacer $T(1+\mu)_{o(1+\mu)}$ par $T(1+\xi)_{o(1+\mu)}$

Théorème : $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$ est un groupe simple.

1.3. Rappelons, voir [1] , que $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{-1,+1\}$ agit fidèlement sur $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
si $g \in PSL(2,\mathbb{R})$

$$z \in \Delta \to g(z) = \frac{\alpha(z-a)}{1-\bar{a}z} \quad \text{avec } |\alpha| = 1 \text{ , et } |a| < 1.$$

Comme chaque $g \in PSL(2,\mathbb{R})$ se prolonge à $S^1 = \partial\bar{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $PSL(2,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1) \cong \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1)$ et l'on a dans $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$ les inclusions

$$T^n \hookrightarrow (PSL(2,\mathbb{R}))^n \hookrightarrow \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$$

où $(PSL(2,\mathbb{R}))^n$ est le produit de n exemplaires de $PSL(2,\mathbb{R})$.

Lemme 1. Soient $h_t = \frac{z-it}{1+itz}$ $-1 < t < 1$, et $f_b = \frac{z-b}{1-bz}$ $0 < b < 1$; $b \in \mathbb{R}$, b fixé petit, alors il existe un chemin C^{ω} $t \to g_t \in PSL(2,\mathbb{R})$ pour $t \in V$ (V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$) et $w : V \to \mathbb{R}$, w de classe C^{ω} , $w'(0) \neq 0$, tels que :

$$e^{2\pi i w(t)} z = (g_t . h_t . f_b . h_t^{-1} . f_b^{-1} . g_t^{-1})(z) \quad \text{pour } z \in \Delta .$$

(i.e. une fois sur T^1 c'est le chemin

$$V \ni t \to R_{w(t)} \in T^1 \subset \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1) \quad).$$

Démonstration : Par un calcul , on montre que le point fixe a_t de $k_t = h_t\, f_b\, h_t^{-1}\, f_b^{-1}$ décrit pour t petit un arc de courbe $\mathbb{R}$ analytique dans Δ, et que la dérivée en z de k_t au point fixe de $k_t(a_t)$ (i.e. $e^{2\pi i w(t)}$) est telle que $w'(0) \neq 0$,

On a

$$g_t^{-1}(z) = \frac{z+a_t}{1+\bar{a}_t z}$$

1.4. On en déduit par le changement de paramètre $u = w^{-1}(t)$ qu'il existe $\tau > 0$ (on pose $I = [-\tau, +\tau]$), des applications C^{ω}
$t \in I^n \to \tilde{g}_t \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$ et $t \in I^n \to \tilde{h}_t \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$, et $\tilde{f} \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n)$ telles que

$$R_t = \tilde{g}_t \circ \tilde{h}_t \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}_t^{-1} \circ \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}_t^{-1}.$$

1.5. On pose $I = [-\tau, +\tau]$ avec τ déterminé par 1.4. et $D^n \subset I^n$ le disque de rayon τ. Soit $C^\omega(D^n, \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n))$ l'espace des applications de $D^n \times T^n$ dans T^n de classe C^ω telles que $(t,x) \in D^n \times T^n$, $f : D^n \times T^n \to T^n$, $f(t,x)$ est C^ω en (t,x) et pour (t,x) variant sur un voisinage de $D^n \times T^n$, dans $\mathbb{R}^n \times T^n$, voisinage dépendant de f, et si $f_t : x \to f(t,x)$, alors pour tout $t \in D^n$, $f_t \in \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$.

La C^r topologie , (r entier, $0 \leq r \leq +\infty$) sur $C^\omega(D^n, \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n))$ est la C^r topologie induite de la C^r topologie sur $C^\omega(D^n \times T^n, T^n)$.

On a l'application canonique $R_t \in C^\omega(D^n, \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n))$

$$t \in D^n \to R_t \in \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n).$$

$g_t \in \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$ est C^r proche de l'application canonique R_t si

$$D^n \times T^n \ni (t,x) \to g_t(x) - x - t \in T^n \text{ est } C^r \text{ proche de } 0.$$

Soit $C_0^\omega(D^n, \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)) = \{g_t \in C^\omega(D^n, \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)) \mid g_0 = \mathrm{Id}\}$.

1.6. Soit $G \neq \{\mathrm{Id}\}$, un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$ alors G est un sous-groupe dense pour la C^∞ topologie.

Lemme 2 : Il existe une application $g_t : D^n \to G$ telle que $g_t \in C_0^\omega(D^n, \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n))$ soit C^∞ proche de l'application canonique R_t.

Démonstration : On approxime $\tilde{f}$ par des éléments de G dans la C^∞ topologie.

1.7. Définition : Soit $R_\gamma \in T^n$, on dit que R_γ satisfait à une condition diophantienne I (en abrégé c.d.I), si $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n)$ étant un relèvement à $\mathbb{R}^n$ de $R_\gamma \in T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$,
il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $(k_0, k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n - \{0\}$, on ait :

$$|k_0 + \sum_1^n k_i \tilde{\gamma}_i| \geq c/|k|^\alpha$$

avec

$$|k| = \sup_{i=1,\ldots,n} |k_i|$$

(la c.d.I ne dépend pas du relèvement de R_γ)

1.7. Remarque 1 : Il existe des $R_\gamma \in T^n$ satisfaisant à une c.d.I voir [1]

On a le lemme d'ARNOLD [8] , MOSER [3] .

Lemme fondamental : Soit R_γ satisfaisant à une c.d.I, τ détermine par 1.4, et $D^n \subset I^n$ le disque de rayon τ .
Alors il existe un entier r et un voisinage W de l'application canonique R_t dans $C^\omega_o(D^n, \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n))$ (W est induit par un voisinage dans la C^r topologie) tel que si $g_t \in W \subset C^\omega_o(D^n, \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n))$ il existe un voisinage V de R_γ dans $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ (V est induit par la C^r topologie) tels que pour tout $f \in V$, il existe $t \in D^n$ et $\varphi \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ avec $g_t \circ f = \varphi^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi$.

La démonstration du lemme fondamental suit les idées de J. MOSER [3] . On On a les mêmes enchaînements que [2] . Une simplification de RUSSMANN [5] nous permet de donner une démonstration unifiée du lemme fondamental et de celui de [2] ; on utilise la méthode de Newton où l'on suppose que l'on a seulement un inverse approché de la différentielle à un terme quadratique près. voir aussi [9] .

1.8. Remarque : Le lemme fondamental est valable si on remplace ω par ∞ on a la même esquisse de démonstration que [1] .

1.9. Soit $S \neq \emptyset$, $S \subset \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$; on désigne par $W^\omega(S)$ le plus petit sous-groupe distingué engendré par S dans $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$.

Corollaire 1 : Le plus petit sous-groupe distingué engendré par T^n dans $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ est $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ (i.e. $W^\omega(T^n) = \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$).

On choisit l'application canonique $t \in D^n \to R_t \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ et R_γ satisfaisant à une c.d.I
Il existe, d'après le lemme fondamental, un voisinage V de R_γ dans $\mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ tel que pour tout $f \in V$:
Il existe $t \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ vérifiant $R_t \circ f = \varphi^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi$ (+)
On conclut comme dans [1] .

1.10. Remarque : 1) On peut montrer en utilisant J. MOSER [4] et [1] que la décomposition (+) du corollaire 1 est localement unique en t, i.e. il existe un voisinage U de (0,Id) dans $T^n \times \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ tel que si $(t_i, \varphi_i) \in U$ pour i = 1,2 avec $f \in V$ et $R_{t_i} \circ \varphi_i^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi_i = f$ pour i = 1,2 alors

$$R_{t_1} = R_{t_2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \in T^n$$

Il y a unicité locale si l'on impose que $\varphi \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n,0) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^n) \mid \varphi(0)=0\}$
Il y a unicité locale en C^{∞} et en C^r (voir [4]).

2) Si n = 1 la décomposition (+) est même unique en $t \in T^1$:

Si $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}(T^1)$

s'écrit

$$R_t \circ f = \varphi^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi \ ,$$

alors R_t est unique même si t n'est pas petit.
Ceci résulte de S. STERNBERG [6] , chapitre III, page 34.

3) L'application qui à chaque $f \in V \subset \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1)$ associe l'unique $R_t \in T^1$ (i.e. $f \in V \to R_{t(f)} \in T^1$) vérifiant

$$R_t \circ f = \varphi^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi$$

est continue pour la C^{∞} topologie sur $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1)$, ceci résulte de [1] et on peut aussi le montrer en utilisant J. MOSER [3] .

4) On conclut d'après STERNBERG [6] ou [8] que si $f \in V \subset \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1)$ et si le nombre de rotation de f est γ, f est C^{ω} conjugué à la rotation R_γ . (On a le même résultat en remplaçant la classe C^{ω} par C^{∞} .)

5) Soit r l'entier déterminé par le lemme fondamental. Par approximation, on conclut que si $f \in \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1)$ est C^r conjugé à R_γ , alors f est C^{ω} conjugué à R_γ.(On a le même résultat si on remplace ω par ∞)
Il existe aussi un entier r tel que ceci reste vrai sur T^n (par approximation, de l'existence et la continuité de la décomposition (+) en C^{ω} et C^{∞}, et aussi de l'unicité de la décomposition en C^r (r assez grand)(voir [4] et 1.10)

6) Soit : $f \in V \subset \mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(T^1)$;
si le nombre de rotation de f est $\rho(f)$, alors en orientant T^1, on a localement $\rho(f) < \gamma$ équivaut à $t(f) < 0$.

1.11. En utilisant le lemme 1, le lemme 2, le corollaire, les remarques 1.9 et la continuité du nombre de rotation (voir [6] et [8] on peut montrer le **corollaire suivant pour n = 1.**

Corollaire 2 : Si G est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$ avec $G \neq \{Id\}$, et si $R_\gamma \in T^n$ satisfait à une c.d.I, alors $R_\gamma \in G$.

Démonstration : On utilise la notation du lemme fondamental en choisissant $t \in D^n \to g_t \in G$, $g_t \in W$ (ce qui est possible d'après le lemme 2).

Si $f \in V \cap G$ (V voisinage de R_γ dans $\mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$), ce qui est possible car V est ouvert dans la C^∞ topologie et G est dense dans la C^∞ topologie d'après la proposition 1, il suit du lemme fondamental il existe $t \in D^n$ et $\varphi \in \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$ vérifiant

$$g_t \circ f = \varphi^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi$$

mais $g_t \in G$ et $f \in G$, donc $\varphi^{-1} \circ R_\gamma \circ \varphi \in G$, d'où il suit que $R_\gamma \in G$
Ce qui démontre le corollaire 2.

Démonstration du théorème : Si R_γ satisfait à une c.d.I , alors $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ est tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\gamma_i \neq 0 \in T^1$.
Si G est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$, $G \neq \{Id\}$, on a d'après le corollaire 2 l'inclusion $W^\omega(R_\gamma) \subset G$.

On a aussi

$$W^\omega(T^n) \subset W^\omega((PSL(2,\mathbb{R}))^n)$$

Comme $PSL(2,\mathbb{R})$ est un groupe simple et que $\gamma_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$:

$$W^\omega(R_\gamma) = W^\omega((PSL(2,\mathbb{R}))^n)$$

On a donc :

$$G = W^\omega(T^n) = \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$$

ce qui démontre le théorème

1.12. Conjecture . Si M est une variété de classe C^ω compacte connexe,

$\mathrm{Diff}_+^\omega(M)$ est un groupe simple ?

REFERENCES

1 M.R. Herman, Sur le groupe des difféomorphismes du tore, Ann. Inst. Fourier, t. XXIII, fasc. 2, 1973, p. 75-86.

2 M.R. Herman, Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathbb{R}$-analytiques du tore, publication du Centre de Maths de l'Ecole Polytechnique.

3 J. Moser, A rapidly convergent iteration method, part II, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 20, 1966, p. 499-535

4 J. Moser, A new technique for the construction of solutions of non linear differential equations, Proc. Nat. Aca. Sci. Vol 41, 1961, p. 1824-1831.

5 H. Russmann, Kleine Nenner II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K1. 1972 .

6. S. Sternberg , Celestial mechanics, part II, Benjamin, New-York, 1969

7 W. Thurston, Foliations and groups of diffeomorphisms, B.A.M.S. , Vol. 80, 1974, p. 304-307

8 V.I. Arnold, Small denominators I, translations A.M.S. 2è series, Vol 46, p. 213-284.

9 E. Zehnder, An implicit function theorem for small divisors problems B.A.M.S. , Vol 80, 1974, p. 174-178.

Démonstration du lemme 1 :

On pose

$$h_t = \frac{z - it}{1 + itz} \qquad -1 < t < 1 \quad , \quad f_b = \frac{z - b}{1 - bz} \qquad 0 < b < 1 \quad .$$

Rappelons que, si on associe à $\frac{az + b}{cz + b}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & d \\ c & d \end{pmatrix}$, à la composition est associé le produit des matrices.

Soit : à $k_t = h_t \circ f_b \circ h_t^{-1} \circ f_b^{-1}$ est associé

$$\begin{pmatrix} 1 & -it \\ it & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & it \\ -it & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ \bar{B}_t & \bar{A}_t \end{pmatrix}$$

avec

$$A_t = 1 - t^2 - b^2(1 + t^2) + 2ibt$$

$$B_t = (b + it)2ibt$$

et

$$k_t(z) = \frac{A_t z + B_t}{\bar{A}_t + \bar{B}_t z} \quad .$$

Les points fixes de k_t sont donnés par l'équation

$$k_t(z) = z \quad .$$

Soit $\bar{B}_t z^2 + (\bar{A}_t - A_t)z - B_t = 0$; $(b - it)z^2 + 2z + b + it = 0$ si $t \neq 0$.

Si b est voisin de 0, mais fixé, et si $t \to 0$, on a qu'il a bien une racine a_t dans $\operatorname{Int} D^2 = \{z \mid |z| < 1\}$:

$$a_t = \frac{(-1 + \sqrt{1 - b^2 - t^2})}{b - it} = \frac{-1 + \sqrt{1 - b^2}}{b} + itk + o(t)$$

avec $k = \frac{-1 + \sqrt{1 - b^2}}{b^2}$.

On a

$$\frac{dk_t}{dt} = \frac{A\bar{A}_t - B\bar{B}_t}{(\bar{A}_t + \bar{B}_t z)^2} \quad .$$

Comme

$$A_t\bar{A}_t - B\bar{B}_t = (1 - b^2)^2 + o(t) \quad ,$$

$$\bar{A}_t = 1 - b^2 - 2ibt + o(t)$$

et

$$\bar{B}_t a_t = 2ib^2 \cdot \frac{(\sqrt{1 - b^2} - 1)}{b^2} t + o(t) \quad ,$$

on conclut que

$$\frac{dk_t(a_t)}{dt} = 1 + c\,i\,t$$

avec $c \neq 0$ (puisque $-b + \sqrt{1 - b^2} - 1 \neq 0$).
On a donc

$$\frac{dw(t)}{dt} = c \neq 0 \quad . \quad \blacksquare$$

A) Démonstration du lemme fondamental de XV.

La bibliographie se trouve à la fin du mémoire.

On peut donner une démonstration analogue à celle que nous avons donnée en VII, mais nous allons en donner une qui se ramène au théorème VII.2.2. Pour cela nous allons démontrer le lemme fondamental de XV en C^∞ grâce au théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert [1], ou de Hamilton [1], puis l'unicité locale, et finalement en déduire le lemme fondamental à partir de VII.2.

A.1 Prolongement du chemin.

Soit $t \in [-\tau,\tau]^n \to g_t$ le chemin C^ω, avec $g_o = Id$, que l'on suppose suffisamment C^∞-voisin du chemin $t \to R_t$ (en fait C^1-proche suffit).
On peut prolonger ce chemin en un chemin C^∞, $t \in \mathbb{R}^n \to \tilde{g}_t \in D^\infty(T^n)$ vérifiant, pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$ et $t \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{g}_{t+p} = \tilde{g}_t + p$ et aussi $(t,x) \to \tilde{g}_t(x)$ est C^∞, et de plus ce chemin $\tilde{g}_t$ est C^∞-proche du chemin $t \to R_t$; et finalement, si $t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]^n$, $\tilde{g}_t = g_t$.

A.2 Φ_γ .

Soit $\Phi_\gamma : \mathbb{R}^n \times D^\infty(T^n) \to D^\infty(T^n)$ le $\mathfrak{L}$-morphisme de classe C^∞ au sens de Sergeraert [1] défini par

$$\Phi_\gamma(t,h) = \tilde{g}_t \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \quad .$$

A.3 Lemme fondamental en C^∞ : Il existe un entier r_1 dépendant de γ (et un voisinage $V^{r_1}_{R_\gamma}$ de R_γ dans $D^{r_1}(T^n)$ et une application continue pour la C^∞-topologie

$$s : V^{r_1}_{R_\gamma} \cap D^\infty(T^n) \to \mathbb{R}^n \times D^\infty(T^n)$$

telle que

$$\Phi_\gamma \circ s = 1_{V^{r_1}_{R_\gamma}} = \text{Identité sur } V^r_{R_\gamma} \quad .$$

Démonstration :

a) La différentielle de $(r,h) \to \Phi_\gamma(t,h)$, est donnée par : si $(\Delta t, \Delta h) \in \mathbb{R}^n \times (C^\infty(T^n))^n$

$$(1) \qquad d\Phi_\gamma(t,h)(\Delta t,\Delta h) = D\tilde{g}_t \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \cdot \left[(Dh^{-1} \circ R_\gamma \circ h) \cdot \Delta h - \right.$$
$$\left. - Dh^{-1} \circ R_\gamma \circ h \cdot (\Delta h \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h)\right] + \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \cdot \Delta t$$

(D étant la dérivée en x, $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée par rapport à t).

b) Inversion de la différentielle si α satisfait une condition diophantienne.

On cherche $(\Delta t, \Delta h)$, pour η donné, vérifiant

$$d\Phi_\gamma(t,h)(\Delta t,\Delta h) = \eta \quad .$$

(2) Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x)$ la matrice inverse de $D\tilde{g}_t \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h(x)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On compose (1) d'abord à gauche par A, puis à droite par h^{-1} et ensuite à gauche on applique $Dh \circ h^{-1} \circ R_\gamma$. On pose

$$(3) \qquad \tilde{\Delta h} = \Delta h \circ h^{-1} \quad .$$

On a à résoudre

$$(4) \qquad \tilde{\Delta h} - \tilde{\Delta h} \circ R_\gamma = \tilde{\eta} - \tilde{\chi} \cdot \Delta t$$

avec

$$(5) \qquad \tilde{\eta} = Dh \circ h^{-1} \circ R_\gamma \cdot A \circ h^{-1} \cdot \eta \circ h^{-1}$$

et

$$(6) \qquad \tilde{\chi} = Dh \circ h^{-1} \circ R_\gamma \cdot A \circ h^{-1} \cdot \frac{\partial g_t}{\partial t} \circ h^{-1} \circ R_\gamma \quad .$$

Si $\tilde{g}_t$ est suffisamment C^1-voisin de R_t, et si h est C^1-voisin de l'Id, $\tilde{\chi}$ est voisin de $1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(T^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$, et alors $\int_{T^n} \chi(x)dx \equiv [\chi]$ est une matrice voisine de matrice identique et donc inversible.

On a nécessairement, en intégrant (4) sur T^n,

$$(7) \qquad [\chi] \cdot \Delta t = \int_{T^n} \tilde{\eta}(x)dx = [\tilde{\eta}]$$

$$(8) \qquad \Delta t = [\chi]^{-1} \cdot [\tilde{\eta}] \quad .$$

Puis on a à résoudre

$$\tilde{\Delta h} - \tilde{\Delta h} \circ R_\gamma = \tilde{\eta} - \tilde{\chi} \cdot \Delta t \tag{9}$$

avec, par le choix (8) de Δt, $[\tilde{\eta} - \tilde{\chi} \cdot \Delta t] = 0$.
Comme on suppose que α satisfait une condition diophantienne, on a un opérateur linéaire continue

$$L_\alpha^{-1} : C_o^\infty(T^n, \mathbb{R}^n) \to C_o^\infty(T^n, \mathbb{R}^n)$$

qui est un $\mathfrak{L}$-morphisme (i.e. il y a perte de différentiabilité constante). On a par (9), (8) et (3)

$$\Delta h = L_\alpha^{-1}(\tilde{\eta} - \chi \cdot \Delta t) \circ h \tag{10}$$

et

$$\Delta t = [\chi]^{-1} \cdot [\tilde{\eta}] \quad . \tag{11}$$

$L(t,h) : \eta \to (\Delta t, \Delta h)$ est un $\mathfrak{L}$-morphisme, comme composé de $\mathfrak{L}$-morphismes, qui est une section de $d\Phi_\gamma$ au voisinage de $(0, Id) \in \mathbb{R}^n \times D^\infty(T^n)$.

c) Le lemme fondamental en C^∞ résulte du théorème des fonctions implicites de Sergeraert [1] ou de Hamilton [1]. ∎

A.4 Remarques :

1) $f \to s(f) \to t(f) \in \mathbb{R}^n$ est en fait continue dans la C^{r_1}-topologie.

2) Si $V^{r_1}_{R_\gamma}$ est suffisamment petit $f \to t_f$ est voisin de $0 \in \mathbb{R}^n$ et alors

$$\tilde{g}_{t_{(f)}} = g_{t_{(f)}} \in D^\omega(T^n) \quad .$$

A.5 Unicité locale.

Ici g_t est le chemin $t \to R_t$ Soit, si $r \geq 1$,

$$F_\gamma : \mathbb{R}^n \times D^r(T^n, 0) \to D^{r-1}(T^n)$$

$$(t,h) \to R_t \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \quad .$$

F_γ est alors de classe C^1, soit dF_γ sa dérivée.

A.5.1 Lemme : Si R_γ est sur T^n une translation ergodique et si h est C^1-voisin de l'Id, alors $dF_\gamma(t,h)$ est injective.

Démonstration : Soit $dF_\gamma(t,h)(\Delta t,\Delta h) = 0$, avec $\Delta h \in C^r(T^n,\mathbb{R}^n)$ et $\Delta h(0) = 0$. On a, par les mêmes opérations qu'en A.3 (ici $A = Id$, $\partial\tilde{g}_t/\partial t = Id$)

$$\tilde{\Delta h} - \tilde{\Delta h} \circ R_\gamma = \tilde{\chi} \cdot \Delta t \quad . \tag{12}$$

En intégrant, on a

$$[\chi] \cdot \Delta t = 0 \quad \text{avec} \quad [\chi] = \int_{T^n} \tilde{\chi}(x)dx \quad .$$

Si h est C^1-voisin de l'Id, alors $[\tilde{\chi}]$ est inversible, donc $\Delta t = 0$.
(12) devient

$$\tilde{\Delta h} = \tilde{\Delta h} \circ R_\gamma \quad .$$

Puisque R_γ est une translation ergodique de T^n, on a

$$\tilde{\Delta h} = \text{constante}$$

mais $\Delta h(0) = 0$, donc $\tilde{\Delta h} = 0$ et $\Delta h = 0$ par (3) . ∎

A.5.2 Proposition : Soit γ satisfaisant une condition diophantienne, alors il existe un entier r_2 et un voisinage W^{r_2} de $(0,Id) \in \mathbb{R}^n \times D^{r_2}(T^n,0)$ dans la C^{r_2}-topologie tels que, si ψ_1 et $\psi_2 \in W^{r_2}$ et $F_\gamma(\psi_1) = F_\gamma(\psi_2)$, on ait alors

$$\psi_1 = \psi_2 \quad .$$

Démonstration : Soit $L(\psi)$ la section de $dF_\gamma(\psi)$ construite en A.3 : $dF_\gamma(\psi) \cdot L(\psi) = Id$; et puisque $dF_\gamma(\psi)$ est injective par le lemme, on a aussi

$$L(\psi) \cdot dF_\gamma(\psi) = Id$$

avec l'inégalité suivante, puisque γ satisafait une condition diophantienne, il existe un entier σ tel que pour tout $r > \sigma$, on a (les constantes C_1 et C_2 dépendent seulement de r)

$$C_1|\Delta\psi|_{C^{r-\sigma}} \leq |dF_\gamma(\psi)\cdot\Delta\psi|_{C^r} \leq C_2|\Delta\psi|_{C^{r+1}}$$

pour $\Delta\psi \in C^{r+1}(T^n,\mathbb{R}^n)$.
On applique alors Moser [2, theorem 2]. ∎

A.6 Démonstration de XV. 1.10, remarque 5).
Soit γ satisfaisant une condition diophantienne θ le nombre déterminé en VII.2. Soit l'entier

$$r_3 = ([2\theta]+1) + r_2$$

où r_2 est l'entier A.5.2.

Proposition : Soit $f \in D^\infty(T^n)$ (resp. $f \in D^\omega(T^n)$), on suppose que f est C^{r_3}-conjugué à R_γ, alors f est C^∞ (resp. C^ω)-conjugué à R_γ .

Démonstration : On écrit $f = h^{-1}\circ R_\gamma \circ h$, avec $h \in D^{r_3}(T^n,0)$. On approxime h, par une suite de $h_i \in D^\omega(T^n,0)$ dans la C^{r_3}-topologie avec, si $i \to +\infty$, $h_i \to h$. On a

$$h_i \circ f \circ h_i^{-1} = h_i \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \circ h_i^{-1} \quad .$$

Si $i \to +\infty$, $h_i \circ f \circ h_i^{-1} \to R_\alpha$ dans la C^{r_3}-topologie; par VII.2.2 il s'écrit, pour i assez grand,

$$h_i \circ f \circ h_i^{-1} = R_{\lambda_i} \circ g_i^{-1} \circ R_\gamma \circ g_i \quad ,$$

avec $g_i \in D^\infty(T^n,0)$ (resp. $g_i \in D^\omega(T^n,0)$, et par la continuité du théorème de VII.2.2, si $i \to +\infty$, $R_{\lambda_i} \to Id$ et $g_i \to Id$ dans la C^{r_2}-topologie. On a d'autre part

$$h_i \circ f \circ h_i^{-1} = h_i \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \circ h_i^{-1} \quad ,$$

avec, si $i \to +\infty$, $h \circ h_i^{-1} \to Id$ dans la C^{r_3}-topologie et donc, si i est assez grand, $h \circ h_i^{-1} \in W^{r_2}$; par l'unicité locale de A.5.2, on a, pour i assez grand

$$\lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad g_i^{-1} = h_i \circ h^{-1} \quad .$$

Soit, puisque $h_i \in D^\omega(T^n,0)$, f est C^∞ (resp. C^ω)-conjugué à R_γ. ■

A.7 Démonstration du lemme fondamental de XV.

Si $\tilde{g}_t$ est suffisamment voisin du chemin $t \to R_t$, et si $f \in V^{r_1}_{R_\gamma} \cap D^\omega(T^n)$, par A.3 f s'écrit $f = \tilde{g}_{t_{(f)}} \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h$, avec $h \in D^\infty(T^n,0)$. On suppose que le voisinage $V^{r_1}_{R_\gamma}$ de R_γ dans A.3 est suffisamment petit pour qu'alors $\tilde{g}_{t(f)} = g_{t(f)} \in D^\omega(T^n)$ (voir A.4).
On a donc

$$g^{-1}_{t(f)} \circ f = h^{-1} \circ R_\gamma \circ h \quad \text{avec } h \in D^\infty(T^n)$$

(h est donc C^{r_3} (!) avec r_3 défini en A.6), et par A.6 $h \in D^\omega(T^n)$. On a bien

$$f = g_t \circ h^{-1} \circ R_\gamma \circ h$$

avec $h \in D^\omega(T^n)$. ■

C H A P I T R E X V I

SUR L'ALGEBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS R-ANALYTIQUES DU TORE

Cet article est paru dans Lecture Notes in Mathematics No 484,
Springer (1975)

SUR L'ALGEBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS R - ANALYTIQUES DU TORE

M.R. Herman, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique - Paris.

On annonce que l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathbb{R}$-analytiques du tore de dimension n est une algèbre de Lie simple.

1. On utilisera indifféremment "$\mathbb{R}$-analytique" et "de classe C^ω". Soit M une variété de classe C^ω, connexe de dimension finie.

$X^\infty(M)$ (resp. $X^\omega(M)$) désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^∞ pour le crochet (resp. la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^ω).

Comme M admet un plongement de classe C^ω dans un $\mathbb{R}^n$ (n grand) d'après GRAUERT, $X^\omega(M)$ est dense dans $X^\infty(M)$ pour la C^∞ topologie. voir [1] .

Proposition 1.2. Pour toute variété M, compacte, connexe de classe C^ω, l'algèbre de Lie $X^\omega(M)$ est une algèbre de Lie topologiquement simple pour la C^∞ topologie.

Démonstration : La proposition résulte de ce que $X^\omega(M)$ est dense dans $X^\infty(M)$ pour la C^∞ topologie ; d'après [4] tout idéal de l'algèbre de Lie $X^\infty(M)$ est contenu dans un idéal maximal, et tout idéal maximal de $X^\infty(M)$ est de la forme I_{x_0} , où I_{x_0} est l'idéal des champs de vecteurs C^∞ tangents à 0 en $x_0 \in M$ (remarquons que l'algèbre de Lie $X^\infty(M)/I_{x_0}$ est donc simple) et finalement que l'adhérence pour C^∞ topologie d'un idéal de $X^\omega(M)$ dans $X^\infty(M)$ est un idéal de $X^\infty(M)$ et on conclut d'après [4].

1.3. Remarque : Il est facile de montrer en utilisant [4] que l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs de classe C^ω en $0 \in \mathbb{R}^n$ est une algèbre de Lie simple.

2. Considérons le tore

$$T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

On va montrer le

Théorème : $X^\omega(T)$ est une algèbre de Lie simple.

2.1. Définition. $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfait à une condition diophantienne II (en abrégé une c.d.II) s'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ on ait

$$|\langle k,\gamma\rangle| \geq c/|k|^\alpha$$

où l'on a posé

$$\langle k,\gamma\rangle = \sum_i k_i\gamma_i \quad \text{et} \quad |k| = \sup_i |k_i|$$

2.2. Remarques : 1) Si $n = 1$, tout $\gamma \neq 0 \in \mathbb{R}$ satisfait à une c.d. II

2) Si $n \geq 2$ l'ensemble des $\gamma \in \mathbb{R}^n$ qui ne satisfont pas à une c.d.II pour $\alpha = n-1+\varepsilon$ est de mesure de Lebesgue nulle.

3) On a $\alpha \geq n-1$ d'après le principe de Dirichlet.

4) Si a est un nombre algébrique de degré n alors $\gamma = (1,a,\ldots,a^{n-1})$ satisfait à une c.d.II pour un $c > 0$ et $\alpha = n-1$; il suffit d'appliquer le théorème 3, chap. I § 3 de [3] .

Considérons l'inclusion $\mathbb{R}^n \subset X^\omega(T^n)$ définie par les champs de vecteurs constants ; on a

Lemme 1 : Si $\gamma \in R^n$ satisfait à une c.d.II et si $I \subset X^\omega(T^n)$ est un idéal de $X^\omega(T^n)$ tel que $\gamma \in I$ alors $I = X^\omega(T^n)$.

Démonstration : Soit la dérivation

$$\mathcal{L}_\gamma : Y \in X^\omega(T^n) \to \mathcal{L}_\gamma(Y) = [\gamma,Y] \in X^\omega(T^n)$$

D'après J. MOSER [2] lemme 1, § 6, si γ satisfait à une c.d.II l'image de $\mathcal{L}_\gamma$ est fermée et de codimension n : $f = (f_1,\ldots,f_n) \in \mathrm{Im}\mathcal{L}_\gamma$ si et seulement si $(\int_{T^n} f_1\, d\mu, \ldots, \int_{T^n} f_n\, d\mu) = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, $d\mu$ étant la mesure de HAAR de T^n. Comme I est dense dans $X^\omega(T^n)$ pour la C^∞ topologie d'après la proposition 1 et que $I \supset \mathrm{Im}\,\mathcal{L}_\gamma$ on a donc $I = X^\omega(T^n)$. Ce qui démontre le lemme 1.

2.3. On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique : on a l'isomor-

phisme d'e.v.t. pour la C^∞ topologie,

$$C^\omega(T^n,\mathbb{R}^n)^n \cong C^\omega(T^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$$

A chaque $(f_1,\ldots,f_n) \in (C^\omega(T^n,\mathbb{R}^n))^n$ on associe sa matrice M. Soit $1 \in C^\omega(T^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ l'application constante : pour tout $x \in T^n$, $1(x) = Id \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

On a le lemme suivant d'Arnold MOSER,

Lemme fondamental : Soit $\gamma \in R^n$ satisfaisant à une c.d.II ; il existe un entier $r > 0$ (dépendant de n et de γ); il existe un voisinage W de l'application constante $1 \in C^\omega(T^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ (W est induit par la C^r topologie) tel que si

$$M = (f_1,\ldots,f_n) \in W \subset C^\omega(T^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$$

alors il existe un voisinage V_M de γ dans $X^\omega(T^n)$ (V_M est un voisinage induit par la C^r topologie) tel que pour tout $f \in V_M$, il existe $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in Diff^\omega_+(T^n)$ (φ est un difféomorphisme de classe C^ω,C^1 isotope à l'identité de T^n) vérifiant

$$f + \Sigma \lambda_i f_i = \varphi_*(\gamma) \quad . \quad (+)$$

(i.e. pour tout $x \in T^n$, $f(x) + \Sigma\lambda_i f_i(x) = T\varphi_{o\varphi^{-1}(x)} \cdot \gamma$ où $T\varphi_{o\varphi^{-1}(x)} \cdot \gamma$ est la différentielle de φ au point $\varphi^{-1}(x)$ appliqué au vecteur γ).

2.4. Remarque : La décomposition (+) est localement unique en λ : il existe un voisinage de $(0,Id)$ dans $\mathbb{R}^n \times Diff^\omega_+(T^n)$ tel que si $(\lambda^i,\varphi^i) \in U$ pour $i = 1,2$ et $f \in V$, avec $M.\lambda^i + \varphi^i_*(\gamma) = f$ pour $i = 1,2$ alors $\lambda^1 = \lambda^2$, et $\varphi^1 \circ (\varphi^2)^{-1} \in T^n \subset Diff^\omega_+(T^n)$.

La démonstration du lemme fondamental suit la démonstration de MOSER.[2] On démontre l'analogue du théorème 1 (analytic case) § 6 de [2], ainsi que l'addition du théorème 1 § 6 de [2] , en remplaçant 1 par $M = (f_1,\ldots,f_n)$ (i.e. $\varphi_*(\gamma) = f + \Sigma\lambda_i f_i = f + M.\lambda$) . Puis on détermine des voisinages W de V_M comme dans la démonstration du théorème 3 § 7 de [2] .

On remarque que si M et f sont de classe C^ω, les suites d'approxi-

mations f_k et M_k déterminées par le lemme 1, § 7 de [2] , (k entier) ces suites d'approximation ont la propriété suivante :

On pose $z = (x_1 + iy_i, \ldots, x_n + iy_n) \in C^n$ et si $g \in C^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est périodique, on désigne la complexifiée de g par g(z) ; alors il existe $A > 0$ et $\delta > 0$ telles que pour un k assez grand

$$\left.\begin{aligned} |M(z) - M_k(z)| &\leq A\, e^{-\delta h_k} \\ |f(z) - f_k(z)| &\leq A\, e^{-\delta h_k} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } \sup_i |y_i| = |\operatorname{Im} z| \leq h_k^{-1} = 4^{-k}$$

(On utilise que les coefficients de Fourier d'une fonction périodique C^ω convergent géométriquement), et donc si k est assez grand dans le procédé de la démonstration du théorème 3, § 7 de [2] on peut supposer $f_{k+1} = f$ et $M_{k+1} = M$ et on se trouve dans le cas du théorème 1 § 6 de [2] , le procédé se "stabilise".

Nous donnerons ailleurs une démonstration du lemme fondamental.

2.5. Remarques : 1 - Si r = 1 le lemme fondamental est un exercice simple sur les équations différentielles à variable séparées.

2 - Le lemme fondamental reste valable en classe C^∞ voir [2] , avec des voisinages W^∞ et V_M^∞ dans les espaces de classe C^∞ correspondants. Il y a aussi unicité locale en C^∞ (et en C^r).

2.6. En prenant $M = 1 \in C^\omega(T^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ on a le

Corollaire : Il existe un voisinage V^ω (resp. V^∞) de γ dans $X^\omega(T^n)$ (resp. $X^\infty(T^n)$), V^ω (resp. V^∞) est induit par un C^r voisinage, tel que pour tout $f \in V^\omega$ (resp. $f \in V^\infty$), il existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathrm{Diff}_+^\omega(T^n)$ (resp. $\varphi \in \mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$) vérifiant

$$f + \lambda = \varphi_* (\gamma)$$

Démonstration du théorème : On utilise les notations du lemme fondamental. Soit I un idéal de $X^\omega(T^n)$, $I \neq \{0\}$; alors I est dense dans $X^\omega(T^n)$ pour la C^∞topologie, d'après la proposition 1.

On se donne $\gamma \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant une c.d. II. On détermine par le lemme fondamental un voisinage W. On choisit $M \in W$, tel que si $M = (f_1, \ldots, f_n)$ on ait pour tout $1 \leq i \leq n$, $f_i \in I$. Puis on a un voisinage V_M de $\gamma \in X^\omega(T^n)$. On choisit $f \in V_M \cap I$. Ces choix sont possibles

car I est dense dans $X^\infty(M)$ et les voisinages W et V_M sont induits par la C^∞ topologie.

Il existe donc $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathrm{Diff}^\omega_+(T^n)$ tels que

$$f + \Sigma\, \lambda_i f_i = \varphi_* \gamma$$

Mais comme $f \in I$ et $f_i \in I$ pour $1 \leq i \leq n$, $f + \Sigma\, \lambda_i f_i \in I$. Il existe donc un isomorphisme de l'algèbre de Lie $X^\omega(T^n)$, φ_*^{-1}, tel que $\varphi_*^{-1}(I)$ est un idéal $\gamma \in \varphi_*^{-1}(I)$ et le théorème résulte du lemme 1.

2.7. Remarque : Si M est une variété de classe C^ω non compacte $X^\omega(M)$ n'est jamais simple . Si $M = \mathbb{R}$, on considère une suite $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in N$ telle que si $i \to +\infty$, $a_i \to +\infty$, la suite a_i étant discrète, et les a_i tous distincts.

Si $f \in X^\omega(\mathbb{R})$ soit $j^{b_k}_{a_k} f$ le jet d'ordre b_k de f au point a_k. Si $b_k \geq 0$; $b_k \in N$.

Alors $I = \{f \in X^\omega(\mathbb{R}) \mid$ il existe un entier k_o une suite d'entiers b_k définit pour $k \geq k_o$, $b_k \to +\infty$, si $k \to +\infty$ tel que $j^{b_k}_{a_k}(f) = 0$ si $k \geq k_o\}$ est idéal non trivial de $X^\omega(\mathbb{R})$.

Pour M une variété C^ω quelconque non compacte, on construit des exemples similaires en utilisant le théorème B de CARTAN qui affirme que l'on peut déterminer une fonction C^ω ayant ses jets d'ordre fini nuls sur un ensemble discret de M.

2.8. Remarque : Si M est une variété de classe C^∞, compacte connexe, il résulte de [4] que $X^\infty(M) = [X^\infty(M), X^\infty(M)]$ (si L est une algèbre de Lie, $[L,L]$ est l'idéal dérivée de L).

En effet, il est facile de voir que l'idéal $[X^\infty(M),X^\infty(M)]$ n'est pas contenu dans un idéal maximal.

Il résulte du théorème que

$$X^\omega(T^n) = [X^\omega(T^n), X^\omega(T^n)]$$

On voit facilement en utilisant le lemme 1 que tout élément de $X^\infty(T^n)$ (resp. $X^\omega(T^n)$) est la somme de deux crochets.

Soit $f = (f_1,\ldots,f_n) \in X^\infty(T^n)$ (resp. $X^\omega(T^n)$). Soit γ satisfaisant une c.d. II ; alors si

$$\lambda = \left(\int_{T^n} f_1 \, d\mu \ , \ \int_{T^n} f_2 \, d\mu \cdots, \ \int_{T^n} f_n \, d\mu\right)$$

où $d\mu$ est la mesure de Haar de T^n, $f - \lambda \in \operatorname{Im} \mathcal{L}_\gamma$, i.e. il existe $Y \in X^\infty(T^n)$ (resp. $Y \in X^\omega(T^n)$) tel que

$$f - \lambda = [\lambda, Y]$$

Si $(x_1,\ldots,x_n) \in T^n$ sont des coordonnées ,

$$X_1 = \frac{1}{2\pi} (\lambda_1.\cos 2\pi x_1,\ldots,\lambda_n \cos 2\pi x_n)$$

$$X_2 = (\sin 2\pi x_1,\ldots, \sin 2\pi x_n)$$

alors

$$[X_1,X_2] = \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

et donc

$$f = [X_1,X_2] + [\gamma,Y] .$$

2.9. Conjecture : Si M est une variété C^ω compacte connexe, $X^\omega(M)$ est algèbre de Lie simple.

REFERENCES

1. H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. Math. 68 (1958) , 460-472.

2. J. Moser, A rapidly convergent iteration method and non linear differential equations II, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 20, 1966, p. 499-535.

3. T. Schneider, Introduction aux nombres transcendants, traduction Gauthiers-Villars, 1959.

4. M.E. Shanks and L.E. Pursell, The Lie algebra of a smooth manifold Proc. Amer. Math. Soc. 1953, p. 468-472.

A) Esquisse de la démonstration du lemme fondamental.

A.1 Comme la démonstration du lemme fondamental est identique à celle du théorème VII.2.2, nous allons seulement esquisser cette démonstration en montrant comment on obtient un inverse à un terme quadratique près. Le lecteur peut soit se rapporter à Zehnder [1] soit (et aussi) prendre la démonstration comme un exercice.
On reprend les notations du chapitre VII.

A.2 Le problème.
On cherche, pour $M \in C^\omega(T^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ suffisamment voisin de 1 et $f \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n) = X^\omega(T^n)$ donné (voisin de γ), à résoudre

$$F(f,\psi) = f \circ g + M \circ g \cdot \lambda - Dg \cdot \gamma = 0$$

avec $\psi = (\lambda, g) \in \mathbb{R}^n \times D^\omega(T^n)$.

A.3 L'équation linéarisée.
L'équation linéarisée en l'Id de $g \in D^\omega(T^n) \to Dg \circ g^{-1} \cdot \gamma \in X^\omega(T^n)$ est

$$L_\gamma : \Delta g \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n) \to D(\Delta g) \cdot \gamma \in [C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n)] = \{\varphi \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n) \mid [\varphi] = 0\} \quad .$$

Si $\eta \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n)$ avec $[\eta] = 0$, on cherche $\xi \in C^\omega(T^n, \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$D\xi \cdot \gamma = \eta \quad .$$

Soit, si $\eta(x) = \sum_k \hat{\eta}(k)\ e^{2\pi i \langle k, x\rangle}$,

$$\xi(x) \sim \sum_k \hat{\xi}(k)\ e^{2\pi i \langle k, x\rangle} \quad .$$

On a par identification (si le $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$)

$$\xi(k) = \hat{\eta}(k)/\langle k, \gamma\rangle \quad .$$

Soit $\xi = G_\gamma * \eta$ avec $G_\gamma = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\langle k, \alpha\rangle}\ e^{2\pi i \langle k, x\rangle}$ (une distribution formelle).
On suppose que γ satisfait une condition diophantienne II (i.e. il existe $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, on ait $|\langle k, \gamma\rangle| \geq \frac{C}{|k|^{n-1+\alpha}}$).

Alors G_γ est une distribution (i.e. dans le dual de $C^\infty(T^n)$). On a plus précisément :
soit $\theta > n - 1 + \alpha$, alors en suivant J. Moser [1] et H. Rüssmann [2], on a la proposition analogue à VII.4.1 :

Proposition : Soit $h_1 \leq 1$. Il existe une application linéaire $L_\gamma^{-1} : [C^\omega_{h_1}] \to \bigcup_{h<h_1} C^\omega_h$ telle que, si $h < h_1$ pour $\eta \in [C^\omega_{h_1}]$, si on pose $\xi = L_\gamma^{-1}[\eta]$, alors on a

$$L_\gamma(\xi) = D\xi \cdot \gamma = \eta$$

$$\xi(0) = 0$$

et de plus, on a l'inégalité

$$|L_\gamma^{-1}(\eta)|_h \leq K \, |\eta|_{h_1} \Big/ |h_1 - h|^\theta$$

K dépendant seulement de α, du choix de θ.

A.4 On introduit pour $h > 0$ les espaces correspondant à VII.5.1.
Soient $Y_h = \{f \in C^\omega_{h,2} \mid |f|_{h,2} \leq 2\}$
et $Z_h = \{M \in C^\omega_{h,2}(B_h, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)) \mid |M - 1|_h \leq \frac{1}{16} \text{ et } |M|_{h,2} \leq 2\}$.

Considérons pour $f \in Y_h$ et $M \in Z_h$ et $\nu \leq h/2$,

$$\psi = (\lambda, g) \in V^1_\nu \longrightarrow F(f,M,\psi) = f \circ g + M \circ g \cdot \lambda - Dg \cdot \gamma \in C^\omega_{\nu,1} \quad ,$$

$\psi \to F(f,M,\psi)$ est de classe C^1 par VII.3.8. La différentielle est donnée par

A.5 $$dF(f,M,\psi) \cdot \Delta\psi = Df \circ g \cdot \Delta g + M \circ g \cdot \Delta\lambda + DM \bullet g \cdot (\Delta g, \lambda) +$$
$$- D(\Delta g) \cdot \gamma \quad .$$

A.6 Le théorème d'Arnold : On suppose que $h < 1$. Choisissons θ comme en A.3. Soit $f_o \in Y_h$, $M_o \in Z_h$, $\psi_o = (\lambda_o, g_o) \in V^2_{h/2}$ tels que l'on ait

$$F(f_o, M_o, \psi_o) = f_o \circ g_o + M_o \circ g_o \cdot \lambda_o - Dg_o \cdot \gamma = 0 \quad .$$

Il existe deux constantes ε_o et C dépendant seulement de γ et du choix

de θ) telles que, si $\varepsilon \le \varepsilon_o$ et si $f \in Y_h$ vérifie $|f - f_o|_h = \varepsilon h^{2\theta}$ et si $M \in Z_h$, $|M - M_o|_h \le \varepsilon h^{2\theta}$, alors il existe $\Delta\psi = (\Delta\lambda, \Delta g) \in \mathbb{R}^n \times C^\omega_{h/4,\,1}$ tel que

$$F(f,M,\psi_o + \Delta\psi) = 0$$

avec les inégalités

$$|\Delta\psi|_{h/4} \le C\ \varepsilon\ h^{\theta}$$

$$|\Delta\psi|_{h/4,1} \le C\ \varepsilon\ h^{\theta-1} \quad .$$

A.7 Inversion de la différentielle à un terme quadratique près par un opérateur non borné.

On suit, à peu de choses près, les mêmes opérations qu'en VII.5.2.B). On pose

B.1 $$\Delta g = Dg \,.\, E \quad .$$

A.5 devient

B.2 $$dF(f,M,\psi).\Delta\psi = D(f \circ g).E + D(M \circ g).(E,\lambda) + M \circ g.\Delta\lambda - D(Dg.E).\gamma \quad .$$

En dérivant $F(f,M,\psi)$ par rapport à la variable z, on a

B.3 $$D_z F(f,M,\psi).E = D(f \circ g).E - D(Dg.\gamma).E + D(M \circ g).(E,\lambda) \quad .$$

On a

B.4 $$dF(f,M,\psi).\Delta\psi - D_z F(f,M,\psi).E = M \circ g.\Delta\lambda - Dg.DE.\gamma \quad .$$

B.5 Inversion de $(\Delta\lambda, E) \to M \circ g.\Delta\lambda - Dg.DE.\gamma = \eta \in C^\omega_\nu$.

Soit $A(z)$ la matrice inverse de $Dg(z) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ pour $z \in B_\nu$. On a à résoudre

B.6 $$-DE.\gamma + A.M \circ g.\Delta\lambda = A.\eta \quad .$$

En intégrant sur T^n on a

B.7 $$[A.M \circ g].\Delta\lambda = [A.\eta] \quad ,$$

puis on a à résoudre

$$DE.\gamma = -(A\eta - A.M \circ g.\Delta\lambda) \quad .$$

C'est ici qu'intervient la condition diophantienne par A.3.
On détermine ainsi comme en VII.5.2.B) un inverse à un terme quadratique près, avec les mêmes inégalités qu'en VII.5.2.B).

A.8 La démonstration du théorème A.6 est alors identique à celle de VII.5.2.C).

A.9 Esquisse de démonstration du lemme fondamental.
On détermine comme en VII.7.A) un voisinage
$V_\gamma^{2\theta} = \{f \in C^{2\theta}(T^n, \mathbb{R}^n) \mid |f - \gamma|_{C^{2\theta}} \leq \mu\}$ et
$W^{2\theta} = \{M \in C^{2\theta}(T^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \mid |M - 1|_{C^{2\theta}} \leq \mu\}$ tels que, si $f \in C_\gamma^{2\theta}$ et $M \in W^{2\theta}$ et si (f_i) et (M_i) sont les approximations déterminées par VII.6.1.1, alors pour chaque i on peut appliquer le théorème d'Arnold A.6.
Le lemme fondamental résulte alors par le même raisonnement qu'en VII.7.E).

A.10 Le lemme fondamental en C^∞.
a) Soit $\psi_\gamma : \mathbb{R}^n \times D^\infty(T^n) \longrightarrow X^\infty(T^n)$

$$(\lambda, g) \longrightarrow Dg \circ g^{-1}.\gamma + M.\lambda \quad .$$

ψ_γ est un $\mathcal{L}$-morphisme au sens de Sergeraert [1].
b) La différentielle de ψ_γ.
On a

$$d\psi_\gamma(\lambda, g)(\Delta\lambda, \Delta g) = D(\Delta g) \circ g^{-1}.\gamma -$$

$$- D^2 g \circ g^{-1}.(Dg^{-1}.\Delta g \circ g^{-1}, \gamma) + M.\Delta\lambda \quad .$$

c) Inversion de $d\psi_\gamma$ si γ satisfait une condition diophantienne et si M est suffisamment C^1-proche de 1.
On a à résoudre

$$d\psi_\gamma(\lambda, g).(\Delta\lambda, \Delta g) = \eta \quad .$$

On compose à gauche par g, puis on pose

(1) $$\Delta g = Dg.E \quad .$$

On obtient

$$Dg.DE.\gamma + M \circ g.\Delta\lambda = \eta \circ g \quad . \tag{2}$$

On prend A(x), la matrice inverse de Dg(x) pour tout $x \in T^n$ (on suppose g C^1-voisin de l'Id). On a

$$DE.\gamma = A.\eta \circ g - A.M \circ g.\Delta\lambda \quad . \tag{3}$$

Soit,en intégrant sur T^n,

$$[A.M \circ h].\Delta\lambda = [A.\eta \circ g] \tag{4}$$

que l'on peut résoudre si M est C^1-voisin de 1.
Puis on a à résoudre

$$DE.\gamma = A.\eta \circ g - A.M \circ g.\Delta\lambda \quad . \tag{5}$$

C'est ici qu'intervient la condition diophantienne sur γ, par A.3 on peut résoudre par un $\mathfrak{L}$-morphisme (i.e. perte de différentiabilité constante). On obtient par (1), (4) et (5)

$$\eta \to L(\lambda,g)\eta = (\Delta\lambda,\Delta g)$$

qui est un $\mathfrak{L}$-morphisme au sens de Sergeraert (comme composé de $\mathfrak{L}$-morphismes) et $L(\lambda,g)$ est une section de $d\psi_\gamma$, et par le théorème des fonctions implicites de Sergeraert [1] ou Hamilton [1], on conlut qu'il existe un entier $r > 0$ et un voisinage de γ induit par la C^r-topologie $V^r_\gamma \subset C^\infty(T^n,\mathbb{R}^n)$ et une application continue $s : V^r_\gamma \to \mathbb{R}^n \times D^\infty(T^n)$ telle que

$$\psi_\gamma \circ s = 1|_{V^r_\gamma} = \text{Identité sur } V^r_\gamma \quad .$$

A.11 On montre la remarque 2.4 comme en XV.A.5.

C H A P I T R E X V I I

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES $\mathbb{R}$-ANALYTIQUES DE $\mathbb{R}$

Cet article est paru dans Koninkl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen, Amsterdam, Proceedings, Ser. A, 78, No 4 and Indag. Math. 37, No 4 (1975)

KONINKL. NEDERL. AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN — AMSTERDAM
Reprinted from Proceedings, Series A, 78, No. 4 and Indag. Math., 37, No. 4, 1975

MATHEMATICS

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES $\mathbb{R}$-ANALYTIQUES DE $\mathbb{R}$

PAR

MICHAEL ROBERT HERMAN

(Communicated by Prof. N. H. KUIPER at the meeting of December 21, 1974)

SOMMAIRE

On démontre que le groupe des difféomorphismes $\mathbb{R}$-analytiques croissants de $\mathbb{R}$ est un groupe simple.

I. On utilisera indifféremment les notations "$\mathbb{R}$-analytiques" et "de classe C^ω"..

On utilise la notation pour k entier $0 \leqslant k \leqslant \omega$ si k est fini, ou $k = +\infty$ ou $k = \omega$ avec $+\infty < \omega$.

Soit k entier $0 \leqslant k \leqslant \omega$, $\mathrm{Diff}^k(\mathbb{R})$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^k; pour $k = 0$ c'est le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$; si $k \geqslant 1$, $f \in \mathrm{Diff}^k(\mathbb{R})$ si f est C^k et si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \neq 0$.

D^k $(0 \leqslant k \leqslant \omega)$ est le sous-groupe des difféomorphismes croissants de $\mathbb{R}$ (préservant l'orientation de $\mathbb{R}$); si $k \geqslant 1$, $f \in D^k$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

Remarquons que D^k est d'indice 2 dans $\mathrm{Diff}^k(\mathbb{R})$ et donc que D^k est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}^k(\mathbb{R})$.

Si k est entier $0 \leqslant k \leqslant \omega$, r entier $0 \leqslant r \leqslant +\infty$, et $r \leqslant k$, D^k est un groupe topologique pour la $\mathscr{C}^r$ topologie fine. Remarquons que D^ω est un groupe topologique pour la $\mathscr{C}^0$ topologie fine (ou encore topologie de Whitney) et que D^1 est un $\mathscr{C}^1$ ouvert fin de de $C^1(\mathbb{R})$, voir J. CERF [1] et J. MATHER [5].

D'après le théorème d'approximation de Whitney, voir NARASIMHAN § 6 de [6], D^ω est dense dans D^k pour k entier $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ pour la $\mathscr{C}^r$ topologie fine $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, $r < k$.

PROPOSITION 1: *D^ω est dense dans D^0 pour la $\mathscr{C}^0$ topologie fine.*

DÉMONSTRATION: Comme D^ω est dense d'après Whitney dans D^0 pour la $\mathscr{C}^1$ topologie fine, il suffit de montrer que pour tout $f \in D^1$ et tout

voisinage $\mathscr{V}$ de f pour la $\mathscr{C}^0$ topologie fine il existe $g \in D^1$, $g \in \mathscr{V}$. (Rappelons que $\mathscr{V}$ appartenant à une base de voisignage de f est la donnée d'une fonction C^0, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$,

$$\mathscr{V} = \{g \in C^0(\mathbb{R}) | \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f(x) - g(x)| < h(x)\}).$$

Pour tout voisinage $\mathscr{V}$, C^0 fin, de $f \in D^0$, il existe une suite discrète $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, avec $a_i < a_j$ si $i < j$, et $\lim a_i = \pm\infty$ si $i \to \pm\infty$, telle que si f_1 est l'application PL définie de façon que pour $a_i \leqslant x \leqslant a_i + 1$, f_1 soit affine et $f_1(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, alors $f_1 \in \mathscr{V}$. La détermination de f_1 se fait localement de proche en proche. Comme f est croissant, $f_1 \in D^0$.

Pour obtenir g de classe C^1 il suffit de lisser f_1 en chaque point a_i, $i \in \mathbb{Z}$, de telle sorte que $g \in \mathscr{V}$ et $g'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. C'est un problème purement local bien connu. Ceci démontre la proposition 1.

Théorème: *D^ω est un groupe simple.*

Lemme 1: *D^ω est un groupe topologiquement simple pour la $\mathscr{C}^0$ topologie fine.*

Démonstration: Soit $G \neq \{Id\}$, un sous-groupe distingué de D^ω. Soit $\bar{G}$ l'adhérence de G dans D^0, $\bar{G}$ est un sous-groupe distingué de D^0. On rappelle que le support d'un difféomorphisme est la fermeture de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq x\}$. Or le groupe D^0 a trois sous-groupes distingués: le groupe des homéomorphismes à support compact, et les deux groupes des homéomorphismes à support dans une demi droite (à support dans un voisinage resp. de $+\infty$ et $-\infty$) (voir Fine and Schweigert [2]). Comme $G \subset D^\omega$, $\bar{G} = D^0$. Ceci démontre le lemme 1 par définition.

Proposition 2: *Pour tout $f \in D^\omega$, f sans point fixe et $f(0) > 0$, (et donc $f(x) > x$ pour $x \in \mathbb{R}$), f est C^ω conjugué dans D^ω à la translation t: $x \in \mathbb{R} \to$ $\to x + 1 \in \mathbb{R}$.*

Démonstration: $f \in D^\omega$ définit une action de $\mathbb{Z} \cong G = \{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ sur $\mathbb{R}$. Soit $V = \mathbb{R}/G$ la variété de classe C^ω quotient de l'action de G sur $\mathbb{R}$ et $\pi: \mathbb{R} \to V$ la projection canonique (de classe C^ω). V est une variété C^ω de dimension 1 connexe compacte et donc est C^∞ difféomorphe au tore $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (on désigne par $p: \mathbb{R} \to T^1$ la projection canonique). D'après le théorème de Grauert [3], V est C^ω difféomorphe à T^1 par un difféomorphisme $g: V \to T^1$ et l'on suppose que g préserve l'orientation. (Remarquons que pour les variétés de classe C^ω paracompactes de dimension 1, le théorème de Grauert résulte de ce que toute variété ouverte complexe de dimension 1 est de Stein (voir Gunning and Rossi [4]), et donc une complexifiée de V est de Stein, d'où il résulte que V admet un plongement dans $\mathbb{R}^n$ (voir [3])).

D'après la théorie des revêtements, les deux revêtements $G \to \mathbb{R} \to V$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to T^1$ sont isomorphes comme revêtement C^0 et donc comme revêtements C^ω. Il existe $\tilde{g} \in D^\omega$ tel que $g(0)=0$, $\tilde{g} \circ f = t \circ \tilde{g}$, avec $p \circ \tilde{g} = g \circ \pi$ (on a $\tilde{g} \circ f \circ \tilde{g}^{-1} = t^{\pm 1}$ avec $t^{\pm 1}(x) = x \pm 1$ et donc $\tilde{g} \circ f \circ \tilde{g}^{-1} = t$ car $f(0) > 0$). La proposition 2 est démontrée.

Remarque 1: Si $f \in D^k$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, f sans point fixe, $f(0) > 0$, alors f est C^k conjugué dans D^k à t.

Définition: Soit $S \subset D^k$, $S \neq \emptyset$; on désigne par $W^k(S)$ le sous-groupe distingué engendré par S dans D^k.

Proposition 3: *Pour tout k entier, $0 \leqslant k \leqslant \omega$, le sous-groupe distingué engendré par la translation t dans D^k est D^k (i.e. $W^k(t) = D^k$).*

Démonstration: Montrons que tout $f \in D^k$ est le composé de quatre $f_i \in D^k$, $i = 1, \ldots, 4$, $f = f_1 \circ \ldots \circ f_4$, chaque f_i étant un difféomorphisme sans point fixe; alors d'après la proposition 2 et la remarque 1 chaque f_i est C^k conjugué à t ou t^{-1} suivant que $f_i(0) > 0$ ou $f_i(0) < 0$ et donc $f \in W^k(t)$.

Pour voir que chaque $f \in D^k$ est le produit de 4 difféomorphismes de D^k sans point fixe, remarquons que si $f \in D^k$ alors $Id + f \in D^k$, où $(Id+f)(x) = x + f(x)$, et l'on a

$$f = (Id+f) \circ (Id+f^{-1})^{-1}.$$

L'assertion résultera de ce que tout difféomorphisme $\varphi = Id + f$ avec $f \in D^k$ s'écrit $\varphi = f_1 \circ f_2$ avec $f_2 = Id + \exp \circ f$ (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f_2(x) = x + e^{f(x)}$) et $f_1 = \varphi \circ f_2^{-1}$.

Si $f \in D^k$, $f_2 \in D^k$, et f_2 est sans point fixe. f_1 est bien un difféomorphisme de D^k sans point fixe car si pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \varphi \circ f_2^{-1}(x) = x$$

alors

$$\varphi(x) = f_2(x)$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = e^{f(x)}$$

ce qui n'est pas possible. Ce qui démontre la proposition 3.

Corollaire: **Pour tout k entier $0 \leqslant k \leqslant \omega$, D^k est un groupe égal à son groupe des commutateurs.**

On a

$$t_{\frac{1}{2}} = h_2^{-1} \circ t^{-1} \circ h_2 \circ t$$

avec $h_2(x)=2x$ et $t_{\frac{1}{2}}(x)=x+\frac{1}{2}$. Comme $t_{\frac{1}{2}}$ est C^ω conjugué à t d'après la proposition 2, le corollaire résulte de la proposition 3.

Démonstration du théorème: Soit $G\neq\{Id\}$ un sous-groupe distingué de D^ω, G est dense dans D^ω pour la $\mathscr{C}^0$ topologie fine d'après le lemme 1.

Il existe donc $f\notin G$, f sans point fixe (Il suffit de prendre le voisinage $\mathscr{C}^0$ fin de t dans D^ω

$$\mathscr{V}_t=\{f\in D^\omega | x\in\mathbb{R} | f(x)-x-1|<\tfrac{1}{2}\}$$

et

$$f\in\mathscr{V}_t\cap G).$$

D'après la proposition 2 il existe $g\in D^\omega$ tel que

$$g^{-1}\circ f\circ g=t.$$

On a donc

$$t\in G$$

et

$$W^\omega(t)\subset G$$

mais

$$W^\omega(t)=D^\omega$$

d'après la proposition 3, et donc

$$G=D^\omega.$$

Ce qui démontre le théorème.

Remarque 2: Par les mêmes raisonnements que ceux qui précédent on montre que si k entier $1<k<+\infty$ et si H est un sous groupe distingué de D^k, alors H est contenu dans un des groupes $H^k_\pm$ (où H^k_+ (resp. H^k_-) est le sous groupe (distingué) des difféormorphismes de D^k à support dans un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)).

Remarque 3: Pour k entier $0<k<\omega$, le groupe D^k dans $\mathscr{C}^r$ topologie fine n'est pas localement connexe avec $0\leqslant r<+\infty$ et $r<k$.

En effet, soit G^k le sous-groupe: $\{h\in D^k | \lim_{x\to\pm\infty}(h(x)-x)=0\}$. G^k est sous-groupe ouvert (pour $\mathscr{C}^0$ topologie fine) et donc fermé et donc D^k n'est pas connexe. Soit D^k_0 la composante de l'id de D^k, c'est un sous-groupe distingué fermé de D^k, inclus strictement dans D^k.

Si $k=\omega$, $D^\omega_0=\{Id\}$; si $0<k<+\infty$, D^k_0 est inclus dans H^k_+ ou H^k_- d'après la remarque 2.

Si D^k était localement connexe, D^k_0 serait ouvert et donc H^k_+ ou H^k_- serait un sous-groupe ouvert, ce qui n'est pas possible.

Centre de Mathématiques de L'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes–75230 Paris Cedex 05–France
"Laboratoire de Recherche associé au C.N.R.S."

BIBLIOGRAPHIE

1. Cerf, J., Espaces de plongements, Bull. Soc. Math. Fr., **89**, 227–380 (1961).
2. Fine and Schweigert, On the group of homeomorphisms of an arc, Ann. of Math., **63**, 237–253 (1955).
3. Grauert, H., On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. of Math., **68**, 466–472 (1958).
4. Gunning and Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall 1965.
5. Mather, J., Stability of C^∞ mappings, Ann. of Math. (1969), (254–281).
6. Narasimhan, R., Analysis on real and complex manifolds, Masson and North Holland, Amsterdam, 1968.

BIBLIOGRAPHIE

D.V. ASONOV

[1] On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle, Translations Math. U.S.S.R. Izvestijia, vol. 74 (1973), p. 1257-1271.

H. ANSAI

[1] Ergodic skew product transformations on the torus, Osaka Math. J, vol. 3 (1951), p. 85-99.

V.I. ARNOLD

[1] Small denominators I, on the mapping of a circle into itself, Ivestijia Akad. Nauk. serie Math. 25, 1 (1961) p. 21-86 = Translation Amer. Math. Soc. 2nd series, vol. 46, p. 213-284.

[2] Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Uspechi Math. Nauk, vol. 18, 6 (1968) p. 91-196 = Russian Math. Surveys, vol. 18, 8, p. 85-193.

N. BOURBAKI

[1] Espaces vectoriels topologiques, chap. 1 et 2, Hermann, Paris (1966).

[2] Topologie générale, chap. 9, Hermann, Paris (1958).

[3] Topologie générale, chap. 10, Hermann, Paris (1961), 2ème éditon.

T. CARLEMAN

[1] Sur les caractéristiques du tore, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 195 , (1932), p. 478-480.

J.W. CASSELS

[1] An introduction to diophantine approximation, Cambridge Tracts 45, Cambridge Univ. Press.

J. CERF

[1] Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. Math. Fr.,

[2] $\Gamma_4 = 0$, Lecture Notes in Math. No 53, Springer Verlag, Berlin (1968).

L. COMTET

[1] Analyse combinatoire, tome I, Presses Universitaires de France, Paris (1970).

A. DENJOY

[1] Sur les caractéristiques du tore, C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 195, (1932), p. 934-935.

[2] Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. de Math. Pures et Appl., t. 11, 9 (1932), p. 333-375.

[3] Les trajectoires à la surface du tore, C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 223 (1946), p. 5-7.

[4] Un demi-siècle de notes communiquées aux Académies, vol. II, Champ réel, Gauthier-Villars, Paris (1957). Dans ce volume se trouvent réunies en E) "Ergodicité et stabilité des trajectoires" les notes [1] et [3] de Denjoy ainsi que 2 autres notes de 1932.

J. DIEUDONNE

[1] Fondement de l'analyse moderne, tome I, Gauthier-Villars, Paris (1963).

[2] Eléments d'Analyse, tome II, Gauthier-Villars, Paris (1969).

D.G. EBIN

[1] The manifold of Riemannian metircs, Proc. Symp. in Pure Path., vol. XV, A.M.S., p. 11-40.

H. FURSTENBERG

[1] Strict ergodicity and transformations of the torus, Am. J. Math. (1961), p. 573-601.

A. GARSIA

[1] Topics in almost everywhere convergence, Lectures in Advanced Math. 4, Markham, Chicago (1970).

W. GOTTSCHÀLK and G.A. HEDLUND

[1] Topological dynamics, A.M.S. coll. Pubs., vol. XXXVI, Providence, R.I. (1955).

R. HALMITON

[1] The inverse function theorem of Nash and Moser, preprint.

P. HALMOS

[1] Measure theory, Springer Verlag, Berlin (1974).

E. HEWITT and K. STROMBERG

[1] Real and abstract analysis, Springer Verlag, Berlin (1965).

W. HEREWICZ

[1] Ergodic theorem without invariant measure, Ann. of Math., vol. 45 (1944), p. 192-206.

H. JACOBOWITZ

[1] Implicit function theorem and isometric embeddings, Ann. of Math., vol. 95 (1972), p. 191-225.

H. KESTEN

[1] On a conjecture of Erdös Szüsz related to uniform distribution mod 1, Acta Arith. 19 (1966), p. 193-212.

A. KHINTCHINE

[1] Continued fractions, translated by P. Wynn, Nordhorff, Groningen, (1963).

L. KUIPERS and H. NIEDERREITER

[1] Uniform distribution of sequences, Interscience, Wiley, New York (1974).

S. LANG

[1] Introduction to diophantine approximation, Addison Wesley, New-York (1966).

M. MARKELEY

[1] Homeomorphisms of the circle without periodic points, Pro. London Math. Soc., 3rd series, vol. 20, p. 688-698.

J. MARTINEAU

[1] Sur le théorème du graphe fermé, exp. 6, Séminaire d'Analyse P. Lelong, 7ème année, (1966-1967).

D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN

[1] Topological transformation groups, Interscience, New-York (1955).

J. MOSER

[1] A rapidly convergent interaction method, part II, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol 20 (1966), p. 499-535.

[2] A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations, Proc. Nat. Acad. Scie., vol. 41 (1963), p. 1824-1831.

[3] Perturbation theory for almost periodic solutions for undamped non linear differential equations, Inter. Symp. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, New-York (1963), p. 71-79.

K. PETERSEN

[1] On a series of coseccants related to a problem in ergodic theory, Compositio Math. 26 (1973), p. 313-317.

L. PONTRYAGIN

[1] Topological groups, 2nd edition, Gordon and Breach, New-York (1966).

H. ROSENBERG

[1] Un contre-exemple à la conjecture de Seifert, exposé No 434, Séminaire Bourbaki Juin 1973, Lecture Notes in Math. No 383, Springer Verlag, New-York (1974).

[2] Les difféomorphismes du cercle, exposé No 476, Séminaire Bourbaki Nov. 1975.

H. RÜSSMANN

[1] Kleine Nenner II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode, Nach. Aka. Wiss. Göttingen II, Math. Phys. KL (1972).

[2] Über invariante Kurver differenzierbaer Abbildungen eines Keisringes, Nach. Aka. Wiss. Göttingen, Math. Phys. KL (1970), p. 67-100.

T. SAITO

[1] On dynamical systems in n-dimensional torus, Funkical. Ekvac. 7 (1965), p. 91-102.

[2] On the measure preserving flow on the torus, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), p. 279-284.

T. SCHNEIDER

[1] Introduction aux nombres transcendants, traduction, Gauthier-Villars, Paris (1969).

L. SCHWARTZ

[1] Radon measures on arbitrary topological space and cylindrical measures, Tata Inst., Oxford University Press (1973).

F. SERGERAERT

[1] Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 5 (1972), p. 599-660.

H.S. SHAPIRO

[1] Smoothing and approximation of functions, Van Nostrand, New-York (1968).

S. STERNBERG

[1] On differential equations on the torus, Amer. J. Math. (1957), p. 397-402.

[2] Celestial mechanics, vol. II, Benjamin, New-York (1969).

W. THUSTON

[1] On the structure of the group of volume-preserving diffeomorphims preprint.

W.A. VEECH

[1] Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod 2, A.M.S., 140 (1969), p. 1-33.

E. ZENHDER

[1] An implicit function theorem for small divisors problems, B.A.M.S., vol. 80 (1974), p. 174-178.

[2] Generalised implicit function theorems with applications to some small divisor problems I, Comm. in Pure and Appl. Math., vol. 28 (1975), p. 91-140.

Note bibliographique

Le théorème de A. FINIZI (Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 3ème série, t. 67 (1950), p. 243-305) est un problème ouvert qui implique la conjecture d'Arnold (voir IX.7). La démonstration contient une faute (signalée par R. Sacksteder). (Une erreur se trouve p. 269, lignes 5 à 9 ; l'inégalité implicitement utilisée est fausse : si $\left|\frac{a_i\ b_i}{c_i\ d_i}\right| \leq \varepsilon$, les $a_i,\ldots,d_i$ étant positifs, on n'a pas en général $\left|\frac{(\Sigma\ a_i)(\Sigma\ b_i)}{(\Sigma\ c_i)(\Sigma\ d_i)} - 1\right| \leq \varepsilon$ (!) .)

Notes ajoutées en cours d'épreuve .

Chapitre VII

4.1-page 13 : RÜssmann [3] a montré que l'on peut choisir $\theta = n$ même si α est de type constant. Mais dans le théorème 2.2, on est toujours obligé de supposer que $\theta > n$ (voir 2.4.2.b).

6.1.2-page 29 : $h \in C^0(T^n)$ est smooth si $\sup_{x \neq y} \left| \frac{h(x) + h(y) - 2h(\frac{x+y}{2})}{|x-y|} \right| < +\infty$.

On montre alors que h a un module de continuité en $O(\delta|\mathrm{Log}\,\delta|)$. (Voir Jacobowitz [1] et Zehnder [2]).

8.2.4-page 41 : Pour des exemples de $\varphi \in C^\omega(T^1)$, avec $\int_{T^1} \varphi(x)dx = 0$, et de $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, tel que l'équation $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ n'ait pas de solution mesurable. (Voir M. Herman, Régularité des solutions mesurables d'une équation aux différences finies , à paraître).

Chpaitre VIII

1.2-page 2 : Voir XIII.1.3, pour un $f \in \mathrm{Diff}_o^\omega(T^n)$ préservant la mesure de Haar m de T^2, avec f minimal, mais f n'est pas m-ergodique.

1.5-page 9 : P. Deligne [1] a donné une démonstration bien plus simple de cette proposition :

Démonstration : Comme si $n \to +\infty$, $\frac{1}{\sum_{i=o}^{n-1} Df^i} \to 0$ (uniformément), on a donc

$\varphi_n = D(\frac{1}{\sum_{i=o}^{n-1} Df^i}) \to 0$ au sens des distributions. Or $\varphi_n \to -\frac{1}{2}\psi$ m-presque partout et dans L^1 donc $\psi = 0$ m-presque partout. ∎

En fait c'est la même démonstration.

2.5-page 14 : En écrivant les choses autrement, P. Deligne [1] a montré que si $n \to +\infty$, $V_n \to 0$.

Chapitre IX

1.4.b-page 7 : Pour presque tout α, on a une majoration en $C_\alpha k\ (\mathrm{Log}\, k)^{1+\varepsilon}\ \mathrm{Var}(\varphi)$.

3.7-page 17 : P. Deligne [1] a montré que l'on a cette majoration pour presque tout α.

P. Deligne [1] : Les difféomorphismes du cercle, Séminaire Bourbaki n° 477, Février 1976.

H. Rüssmann [3] : Lecture notes in Physics n°38, Springer Verlag, Berlin, 1975, p.598-624.

E R R A T A

(l.h. = ligne du haut , l.b. = ligne du bas).

Chapitre II

p.1 8 l.b. lire Carleman

p.12 9 l.h. lire $\bar{g}_{|F}$

p.13 14 l.b. lire Carleman

p.13 1 l.b. lire ($\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$)

Chapitre III

p.2 6 l.h. supprimer |

p.8 4 l.h. lire $p_1 \in \mathbb{Z}$

Chapitre IV

p.6 11 l.b. lire $|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \leq ([k] + 1)|\varphi|_{C^w} w(|x-y|)$

p.6 5 l.B. lire $|\psi \circ \varphi(x) - \psi \circ \varphi(y)| \leq k|\varphi|_{C^w} w(|x-y|)$

p.13 10 l.b. lire $|Df_1^k|_o$ au lieu de $|Df_1^k|$.

p.18 2 l.h. lire $D^r \mathrm{Log}\, Dg$ au lieu de $D^r \mathrm{Log}\, Dg^{-1}$

p.19 13 l.h. lire

Puisque $\ell_1 = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f^n - Id - n\alpha|_{C^w} < +\infty$, on a

$1 \leq \ell = \ell_1 + 1 < +\infty$. On a peur...

Chapitre V

p.6 14 l.h. lire $C_\varepsilon/q^{2+\varepsilon}$

p.6 1 l.b. lire

$$a(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

p.10 2 l.h. lire F. Bernstein

p.11 5 l.b. Ajouter une parenthèse après GL(2,$\mathbb{Z}$) .

p.13 10 l.h. lire pour la C^r-topologie

p.13 12 l.h. lire $D^\omega(T^1)$.

Chapitre VI

p.4 11 l.b. lire g_i

p.4 10 l.b. lire $g_1 \leq g$

p.4 5 l.b. lire $\sum_{i=o}^{n-1} \frac{g_1 \circ f^i}{n}$

p.8 5 l.b. lire $D^o(T^1)$

p.13 3 l.b. lire"vérifie $\alpha = \rho(f_b)$".. au lieu de"tel que $\alpha = \rho(f_b)$"

p.15 4 l.b. lire $[0,a]$

p.18 12 l.b. lire "par un homéomorphisme"

p.21 5 l.b. lire $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\text{Log } Df^n_{\beta,b}(x_o)| < +\infty$

Chapitre VII

p.4 12 l.b. lire "relèvement"au lieu de "élément"

p.30 7 l.h. lire $t = 2^j$

p.30 3 l.b. lire $|\varphi_j - \varphi_{j-1}|_{1/2^j}$

p.31 7 l.h. lire $|R_{2^j+1}(\varphi)|_{h/2^j}$

p.31 8 l.b. lire $|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2^j}$

p.31 6 l.b. idem 8 l.b.

p.31 1 l.b. lire $|S_{2^j}(\varphi) - \varphi_j|_{h/2^j}$

p.32 2 l.h. idem p.31 1 l.b.

p.32 4 l.h. lire $|\varphi - \varphi_j|_{h/2^j}$

p.32 7 l.h. lire $\varphi_i(t) = (\varphi(t))_i$

p.32 9 l.h. lire $\sup_t$

p.41 3 l.b. lire Anosov [1]).

Chapitre VIII

p.5	10 l.b. et 11 l.b.	remplacer ∞ par L^{∞} .
p.14	5 l.h.	lire $\lvert Df_n - DR_\alpha \rvert_0$
p.21	11 l.b.	lire $\sum_{i=o}^{n-1} \frac{D^2 f^i}{n^2}$

Chapitre IX

p.3	8 l.h.	lire $\lvert f^{q_n} - Id - q_n \alpha \rvert_o$
p.12	2 l.b.	lire $e^{-v}\lvert x - y \rvert$ au lieu de $e^{-v\lvert x-y \rvert}$
p.12	1 l.b.	lire $e^{-v}\lvert \hat{f}^{q_n}(x) - x \rvert$ au lieu de $\exp(-v\lvert \hat{f}^{q_n}(x) - x \rvert)$.
p.23	11 l.h.	lire $\lvert \sum_{i=o}^{n-1} (D(\frac{D^2 f}{Df})) \circ f^i \cdot (Df^i)^2 \rvert_o$

Chapitre X

p.1	5 l.b.	lire "ayant un ensemble fermé minimal non trivial (et invariant)".
p.14	8 et 9 l.h.	lire a^β au lieu de a_k^β

Chapitre XI

p.4	6 l.h.	lire lim inf au lieu de lim
p.7	1 l.h.	lire $g_i \circ R_{p_i/q_i} \circ g_i^{-1} = R_{p_i/q_i}$.
p.11	4 l.b.	lire O_α^ω au lieu de O
p.15	1 l.b.	lire $\alpha \in A$ au lieu de $a \in O$
p.16	10 l.h.	lire supérieurement au lieu de inférieurement .

Chapitre XII

p.5	2 l.h.	lire supérieurement au lieu de inférieurement.
p.11	4 l.b.	lire R_α.

Chapitre XIII

p.7 1 l.b. lire $\int_{T^n}(f - Id)d\mu$.

p.14 7 l.b. lire rang $(\hat{H})$

p.16 6 l.b. lire pour tout k fini

p.23 11 l.b. lire

$$\sum_{i=o}^{q_{n-1}}$$

p.30 9 l.h. lire $\beta(p)$ au lieu de $\beta(p')$

p.32 1 l.h. lire $q^i,(q')^i$ au lieu de $q',(q')^i$.

p.32 2 l.b. lire $R_{\rho_m}(f)$.

p.33 11 l.h. lire supérieurement au lieu de inférieurement.

p.33 12 l.h. lire G_δ au lieu de G

p.33 3 l.b. idem p.33, 11 l.h.

p.33 1 l.b. lire "groupe abélien ayant .. au lieu de "groupe abélien à"...

Chapitre XVII

p.2 1 l.b. lire D^o au lieu de D^1 .

Bibliographie

p.1 2 l.h. lire D. V. Anosov

p.5 3 l.h. lire W. Thurston

p.6 2 l.b. lire

$$\left|\frac{a_i b_i}{c_i d_i} - 1\right| \leq \varepsilon \quad .$$

Chapitre I

p.3 6 l.b. lire $\mathbb{R}_+$

p.6 11 l.b. lire $\delta_\infty(f,g)$

p.11 8 l.h. lire supérieurement au lieu de inférieurement.